VERHANDELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling Natuurkunde

5

VIJFDE DEEL.

MET PLATEN.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST,
1857.

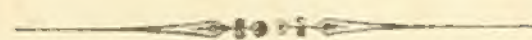


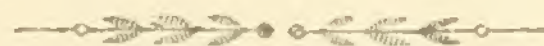
GEDRUKT BIJ W. J. KRÖBER.

INHOUD

VAN HET

VIJFDE DEEL.





SYNOPSIS

HEPATICARUM JAVANICARUM,

ADJECTIS QUIBUSDAM SPECIEBUS

HEPATICARUM NOVIS EXTRA-JAVANICIS.

PARTIM DESCRIPSIT ICONIBUSQUE ILLUSTRAVIT

C. M. VAN DER SANDE LACOSTE,

Med. Doct.

Edidit Academia Regia Scientiarum.

CUM TABULIS XXII.

AMSTELÆDAMI,
C. G. VAN DER POST.
1856.

SYNOPSIS

HEPATICARUM JAVANICARUM,

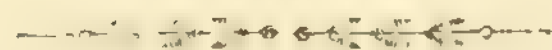
ADJECTIS QUIBUSDAM SPECIEBUS

HEPATICARUM NOVIS EXTRA-JAVANICIS.

PARTIM DESCRIPSIT ICONIBUSQUE ILLUSTRAVIT

C. M. VAN DER SANDE LACOSTE,

Med. Doct.



Primam notionem Hepaticarum Javanicarum THUNBERGIO debemus, qui cum plantis Phanerogamis Hepaticas aliquantulas legit, quae specimina descripsit SWARTZIUS. Messem insignem Hepaticarum in Java insula legerunt Vir. Clar. BLUME et REINWARDT, quae conjunctis studiis et opera horum virorum et Clar. NEES ab ESENBECK editae sunt in Novis Actis Acad. Caesar. L. C. Nat. Cur. T. XI et XII. Anno 1830, cura hujus auctoris celeberrimi, publici juris facta est Enumeratio plantarum Cryptogamicarum Javae, cujus fasciculus prior Hepaticas continet. Posthac nonnullas Hepaticas Javanicas descripserunt Viri Clar. LEHMANN in Pugillis novarum et minus cognitarum stirpium et HOOKER et MONTAGNE in Diariis London Journal of Botany et Annales des sciences naturelles. Hepaticae Javanicae pluribus novis adauctae, (praesertim detectae a Viris Doct. HASSKARL et JUNGHUHN), et in novum systema redactae, in Synopsi Hepaticarum describuntur, auctoribus GOTTSCHE, LINDENBERG et NEES ab ESENBECK. Eodem fere tempore Clar. LINDENBERG, postea conjunctim cum Clar. GOTTSCHE, Species Hepaticarum edere coepit, iconibus illustratas. Tandem iisdem auctoribus LINDENBERG et GOTTSCHE expositionem debemus Hepaticarum in Herbario Zollingeriano obviarum, quas alter edidit in Botani-

sche Zeitung, 1848, alter in Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch Indie, 1855. Vir Doct. ZOLLINGER in Systematisches Verzeichniss easdem species denuo promulgavit. Atque horum virorum operibus factum est, ut Hepaticae Javae insulae, prae iis aliarum regionum tropicarum sint investigatae et cognitae.

Vir Doct. JUNGHUHN in itinere suo per Javae insulam magnam copiam plantarum legit et transvehi curavit, quae a diversis auctoribus sunt expositae. Vir Clar. DE VRIESE mihi proposuit ante sexennium et persuasit, ut Hepaticas Herbarii Junghuhniani investigarem.

Opus haud leve viribusque meis impar, suscipere conatus sum, quandoquidem fautorum amicorumque auxilia et adminicula mihi haud defuerunt. Etenim libros et herbaria sua liberali manu mihi suppeditaverunt Viri Clar. MIQUEL et DE VRIESE et Viri Doct. MOLKENBOER (jam defunctus), DOZY, VAN DEN BOSCH et BUSE. Animo grato, amicissime DOZY! perpetuo recolam tempus nimis cito labens, quo domus tua, ut semper, mihi patuit atque familiaritate tua usus sum atque auxilio, quo indigebam, ut plantulae saepe tenerrimae analysi subtiliori submitterentur, qua a Viro expertissimo KOUWELS ad naturam delineari possent. Vobis gratias omnibus ago habeoque quam maximas.

Phrases diagnosticas specierum jam descriptarum, praesertim depromsi ex operibus NEESII, GOTTSCHEI et LINDENBERGII. Aliquando mihi contigit diagnosi supplere, si quid huic deficeret, v. c. perianthii descriptio. Synonyma consulto omissa sunt, quippe quibus conferri potest Synopis Hepaticarum, quod opus continuo citatur.

Species novas Javanicas in diversis Herbariis obvias, breviter antea jam descripseram. Ex parte enim istae sunt propositae in Diario: DE VRIESE et DOZY Nederlandsch kruidkundig Archief T. III et IV et in opusculo Viri Doct. DOZY, cujus titulus: Plagiochila Sandei, icone illustrata. Praeterea in iisdem Herbariis Hepaticae nonnullae latebant, extra Floram Javanicam lectae, quas non descriptas inveni. Haud abs re fore existimavi, eas simul exponere et iconibus illustratas, Synopseos calci adjungere.

Conamina haec mea, ut benigne accipiantur atque in scientiae sint emolumentum ex animo opto.

Dabam *AMSTELAEDAMI*, d. 28 m. Mart. 1856.

TRIBUS I.

JUNGERMANNIEAE. N. AB E.

I. FOLIOSAE.

SUBTRIBUS 1.

GYMNOMITRIA N. AB E.

I. GYMNOMITRIUM N. AB E.

1. GYMNOMITRIUM BELANGERIANUM GOTTSCHE. *Synops. Hepat.* p. 4. Caule prostrato simplici; foliis subhorizontalibus oblongo-ovatis obtusis subretusisve integerrimis adscendentibus; amphigastriis oblongo-lanceolatis bifidis laciniis linearibus subcontiguis; fructu terminali toro deorsum gibboso, folio florali intimo involucrum aequante apice subinciso. *Syn. Hepat.* l. c.

Habitat Javam. HOLLE in Herb. Dz. et MB. In monte Pangerango. Herb. ZOLLINGER n. 361 b.

II. ALICULARIA CORDA.

2. ALICULARIA SCALARIS CDA. N. ab E. *Hep. Eur.* II. p. 448. Caule repente; foliis subverticalibus suborbiculatis integris apiceve emarginatis; amphigastriis triangulari-subulatis vel ovato-triangularibus integerrimis, superioribusve subdentatis. *Syn. Hep.* p. 10.

α. major; rigida, caule maximam partem adscendente nudo foliisque planis saturate viridibus, involucralibus integris emarginatisve; amphigastriis crebris, superioribus subintegerrimis *Syn. Hep.* l. c.

α. rigens;* caule elongato rigido, infra apicem bis terque simpliciter elongato, ob folia arcte imbricata compresso, foliis integerrimis; amphigastriis creberrimis latis acutis. l. c.

Habitat var. *α* rigens* Javam. Syn. Hepat. Herb. JUNGH.

3. ALICULARIA HASKARLIANA N. ab E. *Syn. Hepat.* p. 12. Caule erecto adscendenteve rigidulo, infra apicem e latere simpliciter innovante radiculoso-comato; foliis subverticalibus patulis semiorbiculatis amplexicaulibus leniter

repandis; involucralibus conformibus basi paulo angustioribus magisque repandis, omnibus e basi radiculoso-capilligeris; perianthio conico tri- (quadri) angulari, ore trifido denticulato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hepat. Herb. Jungh. et Herb. Dz. et Mb.

SUBTRIBUS 2.

COELOCAULES N. ab E.

III. GOTTSCHEA N. ab E.

a. Foliis laevibus.

§. 1. *Amphigastriatae.*

4. GOTTSCHEA REINWARDTI N. ab E. *Syn. Hepat.* p. 15. Ramis apice subfurcatis; foliorum lobo ventrali oblongo-falcato apice eroso-dentato, lobo dorsali foliigeno subquadrato apice acuminato; amphigastriis imbricatis ovatis profunde bifidis utrinque subunidentatis, laciniis margine reflexis; fructu terminali. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh.

5. GOTTSCHEA ALIGERA N. ab E. *Syn. Hepat.* p. 17. Ramis erectis subfurcatis, foliorum lobo ventrali oblongo-falcato apice serrato, dorsali foliigeno duplo breviori oblique truncato integerrimo, angulo superiori acuminato; amphigastriis in planta fructifera ad apicem solummodo obviis inciso-multifidis; fructu terminali, involucri foliis connatis inciso-fimbriatis; caule ramentaceo-folioloso. *Syn. Hep.* l. c.

β. Caule abbreviato vix pollicari erecto. l. c.

γ. *laxa*; caule brevi erecto, foliis distantibus. l. c.

δ. *exalbida;* repens, tota fibris plurimis muscis adhaerens, foliis albidis lanceolatis subdistantibus. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hepat. Var. α. Herb. Jungh. et Herb. Dz. et Mb. Ad montem Salac, cum G. *Blumii.* Zollinger coll. n. 218. Herb. v. d. Bosch.

6. GOTTSCHEA PHILIPPINENSIS N. ab E. et Mont. *Annal. des sc. natur.* XIX p. 244. Caule procumbente furcato; foliis imbricatis lanceolato-acuminatis lobuloque foliigeno semiovato acute excurrente argute serratis; amphigastriis

in planta fructifera tantum obviis, imbricatis tri-quadrifidis serratis; fructu laterali, involucri foliis connatis margine serrato-ciliatis. *Syn. Hep.* p. 18.

Habitat Javam. Syn. Hepat. Herb. JUNGH. TEYSMANN in Herb. Dz. et Mb.

7. GOTTSCHEA JAVANICA N. ab E. *Syn. Hepat.* p. 19. Caule adscendente; foliorum lobulo ventrali dorsalique foliigeno subaequalibus oblongo-ovatis, margine grosse serrato-dentatis ciliatisque; amphigastriis bifidis et subintegris dentato-ciliatis; fructu ... *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH.

§. 2. *Examphigastriatae.*

8. GOTTSCHEA NEESII MONT. *Annal. des sc. nat.* XIX p. 244 t. 9. f. 2. *Syn. Hep.* p. 16. Caule basi procumbente tomentoso ramoso, ramis adscendentibus planis divisis; foliis caulinis imbricatis distichis patentibus oblongis obtusis apice subintegris, lobo foliigeno abrupte truncato trapezoideo integerrimo, supremis surrectis lobuloque foliigeno spinuloso-dentatis; fructu terminali; perianthio nullo; involucro longissimo (subbilineari) cylindrico-cornucopioideo tubuloso ore fimbriato-laciniato, tubo basilari e foliorum involucralium paribus binis aut ternis cum calyptra carnosa pistillis sterilibus coronata concretis, composito; pedunculo pallido tortili flaccido involucro duplo longiore; capsula oblonga ad basin usque quadrivalvi, valvis linearibus. MONT. *Sylloge* p. 54.

Habitat Javam in montosis. Herb. MIQ. TEYSM. in Herb. Dz. et Mb.

b. *Foliis cristulis lamellarum instar obsitis.*

9. GOTTSCHEA BLUMII N. ab. E. *Syn. Hepat.* p. 19. Ramis adscendentibus subdivisis; foliorum lobo ventrali oblongo-falcato dorsalique foliigeno semiovato obtuso duplo breviori acutis, basi ciliatis apice serratis; amphigastriis quadratis retusis ciliatis, subtus in medio loboque ventrali apicem versus cristatis; fructu terminali et axillari, involucro inciso-ciliato basi connato; caule ramentaceo-folioloso. *Syn. Hep.* l. c.

β. Foliis inciso-serratis l. c. Stirps fructifera.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et Mb. Herb. v. D. BOSCH.

SUBTRIBUS 3.

JUNGERMANNIDEAE N. AB E.

IV. PLAGIOCHILA NEES ET MONT.

Sect. 1. *VAGAE.*

Folia vel basi infera dilatata semicordata, vel basi cuneata obovato-oblonga, vel denique subaequalia oblongo-linearia, patenti-divergentia, dentato-spinulosa, rarius ciliata vel integerrima.

§. 1. *Patulae. Folia vel dimidiato-cordata vel ovata, patula, spinuloso-denticulata.*

10. PLAGIOCHILA SALACENSIS GOTTSCHE. *Muscor. Hepaticor. spec. nov. Javanenses* in *Natuurk. Tijdschr. voor Nederl. Indie* 1855. IV. p. 576. ZOLLINGER *Systemat. Verzeichn.* I. p. 21. Caule repente ramoso, ramis iterato-dichotomis elongatis subflexuosis; foliis basi imbricatis horizontalibus patentibus planis trapezoideis, margine ventrali subrecto et apice oblique retuso repando-denticulatis, basi subintegerrima (versus fructificationem fortius armata) reflexis, margine dorsali subsinuato descendente integerrimo; perianthio campanulato-subcompresso late alato (ala apice, nec margine, denticulata) ore dentato; foliis involucralibus margine ventrali duplicato-denticulato-spinosis, dorsali latius reflexis. GOTTSCHE l. c.

Habitat ad ramos montis Salak, Javae insulae. ZOLLINGER pl. Jav. collect. n°. 5560 c.

11. PLAGIOCHILA JUNGHUHNIANA v. D. SD. LC. *Nov. spec. Hepat.* in DE VRIESE, DOZY et MOLKENBOER *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 416. DOZY *Plagiochila Sandei* p. 6. Caule repente; ramis erectis iterato-dichotomis laxis flexuosis; foliis basi imbricatis semiverticalibus patentibus dimidiato-ovatis, apice truncato-emarginatis bi-tridentatis, margine dorsali decurrentibus reflexis integerrimis, ventrali toto parce spinuloso-dentatis, basi reflexis; fructu terminali; perianthio involucro longiori obovato-campanulato, margine antico alato (ala lata apice dentata), ore compresso repando truncato ciliato.

Habitat Javam. Herb. JUNGH.

Gracilis, fusco-lutescens, flexuosa, 0,05—0,08 longa, dichotomo-ramosa. Rami superiores subfasciculati; ramus primarius erecto-adscendens, basi subaphyllus, cum foliis 0,003 latus. Folia laxe imbricata vel contigua, semiverticalia, patentia, dimidiato-ovata, plana; margo dor-

salis strictiusculus decurrens, anguste reflexus aut planus, integerrimus; ventralis subrectus parce spinuloso-denticulatus, subserratus, ad basin patulo-reflexus, denticulatus vel integerrimus; apex truncato-emarginatus, dentibus 2—3 reliquis longioribus. Cellulae parvae, ovali-rotundae, limitibus subcontiguis. Fructus terminalis, rarius ob ramum novellum, lateralis. Folia involucralia perianthio adpressa eique breviora, acuta, margine ventrali dentato-ciliata, basi et margine dorsali latius reflexa. Perianthium obovato-campanulatum, lateribus compressum, dorso toto alatum, ala lata versus apicem denticulata vel denticulato-ciliata, os undulato-repandum truncatum, ciliatum.

Proxima videtur *Plagiochilae Salacensi* GOTTSCHE, cujus specimina authentica non vidi. A *Pl. patula* N. et M. differt statura gracili, ramis pluries dichotomis, foliis densius textis, perianthio non fisso, ala longiore et latiore.

TABULA I.

Fig. 1. *Planta naturali magnitudine; f.* 2. *rami pars a dorso visa, decies et quinquies aucta; f.* 3. *ramus a ventre, octies auctus; f.* 4. *folium caulinum a ventre, decies et quinquies auctum; f.* 5. *textura folii, centies aucta; f.* 6. *folium involucrale, decies et quinquies auctum; f.* 7. *perianthium, decies et quinquies auctum.*

12. PLAGIOCHILA ARBUSCULA LEHM. et L. in LDBG. *Spec. Hep.* p. 23. t. 4. Caule repente; ramis erectis dendroideo-ramosis, ramulis erecto-patulis; foliis imbricatis dimidiato-ovatis acuminatis patenti-divergentibus, margine ventrali apiceque parce dentatis, dente apicali singulo subspiniformi; fructu in ramulis terminali et e dichotomia; perianthio oblongo, longe exserto, ore compresso bilabiato, labiis acutis ciliato-denticulatis. *Syn. Hepat.* p. 27.

Habitat Javam. Syn. Hep.

§. 2. *Distichae. Folia patenti-divergentia, oblique ovata vel antrorsum arcuata basique infera cuneata, vel subaequalia, denticulato-ciliata, rarius subintegerrima.*

13. PLAGIOCHILA JAVANICA N. ab E. et MONT. in *Ann. des sc. nat.* V. p. 52. Caule repente; ramis erectis irregulariter pinnatis; foliis subverticalibus imbricatis semicordatis apice angustioribus et obtusis ibidemque inaequaliter denticulatis subdecurvis, margine ventrali repando-crenatis basique reflexa subcristatis, fructu in ramis terminali; perianthio exserto oblongo, ore compresso truncato dentato-lacero. *Syn. Hepat.* p. 29.

Habitat Javam. Syn. Hep. (THUNBERG.)

Inter dubias Javae indigenas censet Vir Clar. NEES ab E. In collectionibus Hepaticarum Javanicarum, quas inspicere potui, frustra quoque eam quaesivi. Crescit autem in Neelgherries et in Mauritii insula. Quum Java cum hac et Borboniae insula plures Hepaticas communes habeat, monente ipso auctore, quodque ex nostris investigationibus iterum confirmatur, haud improbabile videtur *Plagiochilam Javanicam* N. et M. in Javae insula adhuc detectum iri.

14. PLAGIOCHILA SIMPLEX Lindbg. *Spec. Hep.* p. 54. t. 9. Caule repente; ramis erectis simplicibus vel prolifero-divisis; foliis dissitiusculis subverticalibus obovato-oblongis patentibus obtusis basi cuneatis, margine ventrali apiceque spinuloso-serratis; fructu terminali; perianthio ovato, ore compresso dentato-ciliato. *Syn. Hep.* p. 50.

α. *minor;* simplicior, foliis angustioribus apice solo dentato-serratis, vel rarius dente uno alterove ante apicem instructis. l. c.

Habitat Javam. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

15. PLAGIOCHILA PROPINQUA v. d. Sd. Lc. in Dozy *Nederl. Kruidk. Arch.* IV. p. 95. Dozy *Plagiochila Sandei* p. 5. Caule repente; ramis erectis, dichotomo-dendroideis; foliis adproximatis patentibus semiverticalibus ovato-oblongis decurrentibus, margine dorsali reflexis integerrimis, ventrali versus apicem apiceque obtuso vel acuto spinuloso-dentatis; fructu in dichotomia ramorum et laterali; perianthio compresso ovato, ore truncato dentato-ciliato.

Habitat Javam. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. In montosis Salak. Coll. pl. Jav. Zollinger sub n°. 5560 d. (pl. mascula).

Caulis repens, ramosus. Rami erecti circiter 0,05 longi, dichotomo-ramosi, in plantis masculis dendroidei; ramus primarius, basi nudus, cum foliis 0,004 latus. Folia fusca, opaca, semiverticalia, inferiora laxe imbricata, ovato-oblonga, obtusa; margo dorsalis strictiuscule breviterque decurrens, reflexus, integerrimus; ventralis rotundatus, a medio inde versus apicem et ipso apice spinuloso-dentatus; folia ramulorum magis adproximata, obovata, longius decurrentia, apice inaequaliter spinuloso-dentata, ob dentem unum longiorem subacuta; ramulorum innovantium folia parva, distantia, obovata, parce denticulata, vel apice solo emarginato-bi-tridentata. Textura densa, cellulae subcontiguae, ovali-rotundae. Fructus in dichotomia et lateralis. Folia involucralia erecta, oblonga, margine ventrali apiceque ciliato-dentata, dorsali late reflexa, versus apicem dentata. Perianthium, involucro brevius, obovatum, compressum, non fissum, ore truncatum, denticulato-ciliatum. Spica mascula terminalis, aut apice iterum foliosa, ovato-lanceolata 0,0025 longa, e 6—8 paribus foliorum constans. Folia perigonialia densa, ovata, basi inflata, apice patula, obtusa, denticulata.

Differt a *Plagiochila simplici* Lindbg. statura robustiori, elongata, ramificatione dichotoma, foliis semiverticalibus, decurrentibus eorumque ut et involucri forma et denticulatione. *Plagiochila frondescens* N. ab E. tenuior est, foliis gaudet pallidis, nitidulis, remotiusculis, angustioribus, texturae magis pellucidae; perianthium etiam differt. *Plagiochila Moritziana* Ldbg. et G, quae proxima, differt colore, ramis elongatis, laxis, foliis angustioribus, marginibus siccitate magis minusve revolutis, perianthio subrotundo.

TABULA I.

Fig. 1. *Plantae naturali magnitudine; f.* 2. *folia rami primarii a dorso; f.* 3. *eadem a ventre visa, decies et quinquies aucta; f.* 4. *folia rami tenuioris a dorso, decies*

et quinquies aucta; f. 5. textura folii, quinquagies aucta; f. 6. areolae folii, centies et quinquagies auctae; f. 7. folium involucrale cum pistillidiis, decies et quinquies auctum; f. 8. perianthium cum folio involucrali, vicies auctum; f. 9. spica mascula, decies et quinquies aucta; f. 10. folium perigoniale, tricies auctum.

16. PLAGIOCHILA FRONDESCENS N. ab E. in LINDBG. *Spec. Hep.* p. 52. et p. 159. t. 9. et t. 51. Caule repente diviso; ramis erectis dichotomis divaricatis rigidulis; foliis dissitiusculis subverticalibus oblongis acutis patentibus nitidis longe decurrentibus, margine dorsali reflexis integerrimis, ventrali ad apicem apiceque (vel apice solo) spinuloso-dentatis; fructu laterali; perianthio campanulato-pyriformi, margine membranaceo, ore longe dentato-ciliato, hinc fisso. *Syn. Hep.* p. 51.

α. *tenerrima;* caule filiformi implexo; foliis distantibus cuneiformibus, apice tri-sexdenticulatis. l. c.

β. *diffusa;* ramis laxe dichotomis, in planta mascula subdendroideis; foliis dissitiusculis oblongis, apice denticulatis. l. c.

γ. *rigida;* ramis ramulisque rigidis, basi simplicibus, apice dichotomo-ramosissimis dendroideis fastigiatis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. α. Herb. JUNGH. Var. β. Herb. JUNGH. In montosis Salak, ZOLLINGER coll. n. 5560 ex p. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Var. γ. ad craterem Tjiwidei. Herb. JUNGH. Herb. Dz. et MB. Herb. v. D. BOSCH. — In monte Klabat insulae Celebes. Herb. REINWARDT.

17. PLAGIOCHILA GRACILIS LINDBG. et G. *Syn. Hep.* p. 652. Caule repente; ramis erectis dichotomo-proliferis; foliis subdistantibus verticalibus disticho patentibus cuneatis, margine integerrimis, apice inaequaliter bilobis dentato-spinosis; fructu in ramulis apicali vel in dichotomia; perianthio involucrum superante obovato, ore rotundato ciliato, dorso alato, ala integerrima. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

18. PLAGIOCHILA RUTILANS LINDBG. *Spec. Hep.* p. 47. et p. 157. t. 9. t. 11. et t. 51. Caule repente; ramis erectis parce ramosis; foliis dissitiusculis patentibus divergenti-reclinatisque subverticalibus oblongis, utroque margine basi reflexis integerrimis, versus apicem planis apiceque ipso denticulatis, supremis angustioribus convolutis; fructu terminali; perianthio obovato-tetragono, margine anguste alato (ala nuda), ore bilabiato, labiis brevibus spinuloso-dentatis. *Syn. Hep.* p. 53.

β. *laxa;* ramulis patentissimis, apice subinflexis; foliis magis distantibus, supremis convolutis sphacelatis. l. c.

Habitat Javam. Herb. Dz. et Mb. Var. β. Herb. Jungh. Herb. Dz. et Mb.

19. PLAGIOCHILA SECURIFOLIA N. ab E. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 58. et p. 160. t. 10. Caule repente; ramis erectis subsimplicibus; foliis subimbricatis subverticalibus securiformi-oblongis subaeque-latis arcuatis deflexis subintegerrimis, apice truncato-obtusis emarginato-bi-quadri-denticulatis, margine dorsali toto, ventrali basi recurvis; fructu e dichotomia; perianthio brevi subrotundo involucroque ciliatis. *Syn. Hep.* p. 54.

Habitat Javam. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

20. PLAGIOCHILA DICHOTOMA N. ab E. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 66. et p. 160. t. 15. et t. 17. Caule repente; ramis erectis iterato-dichotomis; foliis subsemiverticalibus approximatis patentibus obovato-lingulatis longe decurrentibus convexis, margine dorsali reflexis obtusis, ventrali apicem versus apiceque obtuso minute denticulatis; fructu terminali axillarique; perianthio campanulato dorso alato (ala serrato-denticulata), ore compresso denticulato-ciliato. *Syn. Hep.* p. 55.

β. foliis, praesertim inferioribus, ob margines dorsales magis deflexos paulo angustioribus, apice evidentius denticulatis decurvis. l. c.

Habitat Javam. (var. β.) Herb. Jungh. — In monte Klabat insulae Celebes. Herb. Reinwardt.

21. PLAGIOCHILA UNGARANGANA v. d. Sd. Lc. Caule repente ramoso; ramis simplicibus dichotomisque; foliis laxe imbricatis semiverticalibus patentibus semiovatis, apice angustioribus, basi utrinque decurrentibus, margine dorsali reflexis integerrimis, ventrali ante apicem obtusum apiceque ipso (vel hoc solo) argute denticulatis; fructu . . .

Habitat Javam, in monte Ungarang, altit. 3000′—5000′. Herb. Jungh.

Caulis repens, foliolis minutis, distantibus, ovatis, apice bidentatis vestitus. Rami erecti simplices vel apice furcati 0,035 longi. Folia inferiora parva, reliqua majora, cum ramo et foliis oppositis 0,0023 lata, imbricata, apice libera, semiverticalia, patentia et, in ramis robustioribus, patenti-subdivergentia, oblonga vel semiovata. Margo dorsalis reflexus, integerrimus, strictus, decurrens, sub apice paulo rotundatus; ventralis rectiusculus, integerrimus vel ante apicem denticulo uno alteriove instructus; basi reflexus, in medium caulem longe decurrens; apex obtusus vel subtruncatus, denticulis vulgo tribus, marginalibus similibus munitus. Spica mascula medium ramum cingens, ovato-lanceolata, 0,0035 longa, e foliorum paribus 6—9 composita. Folia perigonialia imbricata, ovata, basi inflata, apice obtusiuscula, patula, denticulata.

A. *Plagiochila dichotoma β.* differt statura minori, ramis subsimplicibus, foliis apice attenuatis; a *Plagiochila concava* N. ab E. foliis magis planis, apice latioribus et parcius denticulatis.

TABULA II.

Fig 1. *Planta naturali magnitudine; f.* 2. *Caulis cum basi rami, decies auctus; f.* 3. *pars rami a dorso; f.* 4. *pars rami a ventre visa, vicies auctae; f.* 5. *textura folii, centies aucta; f.* 6. *spica mascula, vicies aucta.*

22. PLAGIOCHILA TEREBRANS N. ab E. in LINDBG. *Spec. Hep.* p. 98. t. 20. Caule subdiviso subrecurvo; ramis erectis strictis dichotomo-subpinnatis; foliis approximatis subverticalibus divergentibus decurviusculis longe decurrentibus, margine basi utrinque reflexis dimidiato-ovatis cuneiformi angustatis convexis subintegerrimis, apice emarginato inaequaliter dentatis, dentibus argutis; fructu in ramulis terminali; perianthio obliquo triangulari-campanulato, apice compresso, ore undulato-dentato, dorso alato, ala integerrima, basi latiore. *Syn. Hep.* p. 36.

Habitat Javam, in monte Ungarang, altit. 3000′—5000′. Herb. JUNGH.

Forma tenerior est, foliis dissitiusculis.

Sect. II. *ADIANTOIDEAE.*

Rami erecti, dichotomi, parcius divisi vel dendroidei. Folia dimidiata, cordato-ovata, oblonga, rarius lanceolata, magis minusve dentato-ciliata. Perianthia involucrum aequantia vel dimidio longiora.

§. 1. *Planifoliae. Folia horizontalia, subplana basi ventrali non dilatata.*

23. PLAGIOCHILA SCIOPHILA N. ab E. *in Schedis.* LINDBG. *Spec. Hep.* p. 100. t. 21. Caule dichotomo-fasciculato ramisque procumbentibus repentibus; foliis approximatis horizontalibus patentibus planis ovatis obovatisve emarginato-bidentatis, margine ventrali parce dentato-ciliatis, dorsali subintegerrimis; fructu . . . *Syn. Hep.* p. 37.

Habitat Javam. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Buitenzorg (pl. mascula). Herb. MIQ.

Foliorum margo ventralis basi tantum, dorsalis saepe totus reflexus. Fructus terminalis, in dichotomia et lateralis. Folia involucralia duo, erecta, majora, latiora imprimis, ovata; margo ventralis totus subduplicato-dentato-ciliatus, dorsalis late reflexus, serrato-ciliatus. Perianthium involucro brevius, urceolato-campanulatum, ore compressum, truncatum, longe inciso-ciliatum. Spica mascula incompleta visa: Folia perigonialia imbricata, ovata, obtusa, basi inflata, margine antico versus apicem patulum ciliata, ciliis apicalibus longioribus, sinu lato disjunctis. Foliorum cellulae majusculae.

§. 2. *Dimidiatae. Folia subopposita, basi ventrali dilatata, non vero in cristam conniventia, arcte dentato-ciliata. Perianthium involucrum aequans vel paulo superans.*

24. PLAGIOCHILA TEYSMANNI v. d. Sd. Lc. in Dozy *Plagiochila Sandei* p. 6. Caule repente; ramis erectis dichotomis; foliis semiverticalibus laxe imbricatis ovatis obtusis, margine dorsali reflexis integerrimis, ventrali apiceque arcte ciliato-denticulatis; fructu terminali et in dichotomia; perianthio triangulari-campanulato, dorso alato (ala latiuscula, vel tota vel apice solo ciliata), ore compresso truncato dentato-ciliato.

Habitat Javam. Teysmann in Herb. Dz. et Mb.

Caulis repens. Rami 0,05—0,07 longi, subdichotomi; ramuli patentes vel erectiusculi, cum foliis 0,0035 lati. Folia rigidula, olivaceo-fuscescentia, inferiora parva, distantia, subrotunda, denticulata; superiora majora, alterna, subhorizontalia, laxe imbricata, patenti-divergentia, rotundato-ovata; margo dorsalis, reflexus, decurrens, integerrimus vel ante apicem subserratus; margo ventralis rotundior, cum apice obtuso arcte denticulato-ciliatus, basis ipsius caulem quodammodo obtegens, plana vel subreflexa, integerrima. Textura densa; areolae ovali-rotundae, limitibus contiguis. Fructus terminalis et in dichotomia. Folia involucralia semirotunda, erecta; margo dorsalis late reflexus, serrato-ciliatus; ventralis inaequaliter subduplicatoque dentato-ciliatus. Perianthium involucrum subaequans, campanulatum, aeque longum ac latum; ala latiuscula vel tota vel apice solummodo ciliata; ore compresso, longe dentato-ciliato.

Differt a *Plagiochila laetevirente* Ldbg., quae proxima, ramificatione simpliciore, foliis rigidulis, densius textis et perianthio; a *Plagiochila obtusa* Ldbg. foliis basi ventrali integerrimis, non in cristam conniventibus, perianthio campanulato.

TABULA II.

Fig. 1. *Planta naturali magnitudine; f.* 2. *ramus a dorso, decies auctus; f.* 3. *folia a ventre visa, decies et quinquies aucta; f.* 4. *textura folii, quinquagies aucta; f.* 5. *areolae folii, centies et quinquagies auctae; f.* 6. *folium involucrale, decies et quinquies auctum; f.* 7. *perianthium, decies et quinquies auctum.*

25. PLAGIOCHILA FLACCIDA Lindbg. *Spec. Hep.* p. 78. t. 16. Caule procumbente; ramis adscendentibus elongatis, apice divisis, ramulis deflexis subradicantibus; foliis subimbricatis subverticalibus patenti-divergentibus semicordato-ovatis obtusis dentato-ciliatis, basi ventrali dilatatis subreflexis, dorsali reflexis subintegerrimis. *Syn. Hep.* p. 58.

Habitat Javam. Herb. Jungh.

26. PLAGIOCHILA SEMI-ALATA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Arch.* IV. p. 95. Dozy *Plagiochila Sandei* p. 6. Caule repente; ramis adscendentibus dichotomo-ramosis; foliis basi imbricatis semiverticalibus patenti-diver-

gentibus, dimidiato-ovatis obtusis, margine dorsali reflexis integerrimis, ventrali apiceque spinuloso-dentatis; fructu terminali et laterali; perianthio oblique campanulato, dorso a basi ad medium alato (ala lata, apice ciliata), ore truncato dentato-ciliato.

Habitat Javam. Herb. Jungh.

Caulis repens, fusco-nigricans. Rami erecti, circiter 0,045 longi, adscendentes, cum foliis 0,006 lati, a medio inde dichotomo-ramosi, ramuli patentes, subcurvati. Innovationes tenues subdivergentes. Folia fuscescentia, basi laxe imbricata, semiverticalia, alterna, dimidiato-ovata; margo dorsalis reflexus, integerrimus, decurrens; ventralis rotundatus, spinoso-dentatus, basi dilatatus, planus, integerrimus, paullo decurrens, basi folii oppositi contiguus; apex obtusus vel acutiusculus spinoso-dentatus, vulgo ob dentes binos remotiores subemarginatus. Folia innovationum parva, remota, obovata, margine ventrali parce denticulata, apice emarginata. Textura densa, cellulae parvae, subrotundae vel ovali-rotundae. Fructus terminalis et lateralis. Folia involucralia acutiuscula, margine dorsali reflexa, repando-dentata, ventrali duplicato-spinosa. Perianthium involucrum paulo superans, oblique obovato-campanulatum, compressum, dorso alatum, ala lata a basi ad medium dorsum vel paullo ultra protensa; versus apicem ciliata, vel nuda et apice emarginato-spinosa, ore compresso, longe ciliato.

Differt a *Plagiochila macrostachya* Ldbg., foliis magis alternis et decurrentibus, apice subemarginatis et perianthio. — Rectius forsan in Sect. I. collocanda.

TABULA III.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *ramus a dorso, decies auctus; f.* 3. *ramus a ventre visus, decies auctus; f.* 4. *folia rami innovantis, decies aucta; f.* 5. *textura folii, quinquagies aucta; f.* 6. *cellulae folii, centies et quinquagies auctae; f.* 7. *folium involucrale, decies auctum; f.* 8. *perianthium, decies auctum.*

27. PLAGIOCHILA GYMNOCLADA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief* IV. p. 95. Dozy *Plagiochila Sandei* p. 6. Caule repente; ramis adscendentibus, innovando ramosis, innovationibus flagelliformibus erectis subaphyllis; foliis contiguis vel adproximatis semiverticalibus patentibus oblique ovatis, margine dorsali reflexis, versus apicem serratis, ventrali apiceque emarginato spinuloso-ciliatis; fructu terminali et laterali; perianthio campanulato-pyriformi, dorso alato, (ala angusta, versus apicem spinuloso-dentata), ore truncato dentato-ciliato.

Habitat Javam. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

Caulis repens. Rami adscendentes, 0,05—0,07 longi, cum foliis 0,005 lati; rami secundarii plures, dichotomi, elongati, erecti, e latere et sub involucro ramulos emittentes flagelliformes, erectos, tenues, subfiliformes, 0,015 longos, ob folia decidua subdenudatos, cicatricosos.

Folia viridia, rami primarii contigua, subhorizontalia, patentia, oblique ovata; margo dorsalis reflexus, integerrimus, versus apicem serratus, basi decurrens; ventralis cum apice emarginato spinuloso-ciliatus; bases dilatatae imbricatim tectae, planae, integerrimae vel subdenticulatae. Folia innovationum parva, distantia, obovata vel obovato-elliptica, parce dentata apiceque distinctius emarginato-bidentata. Cellulae minutae, subrotundae, versus basin folii magis elongatae. Fructus terminalis et lateralis. Folia involucralia duo, erecta, late ovata, circumcirca ciliata. Perianthium involucrum aequans, campanulatum, compressum, medio inflatum; dorsi ala angusta, apice dentata; os truncatum, brevius dentato-ciliatum, ciliis subdenticulatis.

Foliis minoribus, contiguis, innovationibus denudatis, perianthii ciliis denticulatis, a reliquis hujus §. distinguitur. *Plagiochila brevicalycina* Ldbg. et G. differt ramificatione et perianthio non alato.

TABULA III.

Fig. 1. *Planta naturali magnitudine; f.* 2. *pars rami fortioris a dorso, decies aucta; f.* 3. *ejusdem a ventre visa, decies aucta; f.* 4. *ramus innovans, quinquies auctus; f* 5. *textura folii, centies aucta; f.* 6. *folium involucrale, decies auctum; f.* 7. *perianthium, decies auctum.*

§. 3. *Cucullatae. Folia basi ventrali reflexa et pleraque in cucullum convoluta, ciliata.*

28. PLAGIOCHILA BLEPHAROPHORA N. ab E. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 102. t. 21. Caule repente flagellifero; ramis adscendentibus divaricatis elongatis subsimplicibus; foliis imbricatis horizontaliter patentibus ovato-oblongis obtusis, circa apicem margineque ventrali dentato-ciliatis, basi utraque integerrimis, margine dorsali anguste reflexo-complicatis; fructu e dichotomia; perianthio brevi obovato subcampanulato inflato, ore oblique truncato dentato-ciliato. *Syn. Hep.* p. 59.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Buitenzorg, Herb. Miq. Herb. Dz. et Mb. Herb. v. d. Bosch. In mont. Salak. Zollinger, Coll. n. 5560. d. ex p. — Ternate. Herb. Reinw.

29. PLAGIOCHILA BANTAMENSIS N. ab E. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 104. t. 22. Caule repente flagellifero diviso; ramis adscendentibus furcatis; foliis imbricatis patenti-divergentibus semiovato-oblongis subtruncatis, basi ventrali subtus reflexo-cucullatis amphigastriisque subquadrifidis longe dentato-ciliatis; fructu terminali; perianthio ovato, ore truncato bifido dentato-ciliato. *Syn. Hep.* p. 59.

β. minor; paulo minor; perianthiis lateralibus brevioribus campanulatis compressis, dorso convexiusculis, ore oblique truncato ciliolato. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Holle in Herb. Dz. et Mb. Var. β. Holle in Herb. Dz. et Mb.

Spicae masculae terminales, solitariae aut fasciculatae (2—5); spicae (rarius iterum bifidae) lineares, 0,02 longae, 0,001 latae, in Var. β. minores, e paribus foliorum 20 pluriumve compositae. Folia perigonialia dense imbricata, ovata, basi inflata, apice obtuso vel acutiusculo patente, integerrima.

30. PLAGIOCHILA SANDEI Dz. in *Nederl. Kruidk. Arch.* IV. p. 92. Dozy *Plagiochila Sandei, icone illustrata* p. 5. *Plagiochila superba* Molkb. *Mspt.* Caule repente; ramis erectis strictis dichotomo-ramosis; foliis imbricatis patenti-divergentibus semiovatis subarcuatis obtusis, margine ventrali rotundato apiceque ciliatis, basi reflexo-cucullatis, dorsali reflexis serrato-ciliatis; fructu terminali et laterali; perianthio obconico elongato compresso, ore truncato breviter ciliato.

Habitat Javam. Herb. Jungh. Herb. Buse. Prope Gadok. Herb. Dz. et Mb., communicavit Cl. v. Hall.

Caulis repens, flexuosus, validus, fusco-nigricans, uti basis ramorum primariorum nudus vel foliorum vetustorum reliquiis vestitus. Rami primarii distantes, elati, 0,07—0,085 longi, cum foliis 0,007—0,008 lati, apice praesertim dichotomi, breviter subfasciculato-ramulosi. Folia tenuia, mollia, luteo-fuscescentia, subpellucida, plana, semiverticalia, imbricata, patenti-divergentia, oblique ovata, subfalcata; margo ventralis rotundatus, totus ciliatus, basi reflexus et in cucullum revolutus; margo dorsalis arcuatim reflexus, totus vel apicem versus serrato-ciliatus; apex planus, obtusus, ciliatus. Folia involucralia erecta, dorso stricta, obtusa, longius ciliata. Textura foliorum e cellulis parvis, sexangularibus. Perianthium involucro longius, terminale et laterale, obconicum, elongatum, curvatum, subcernuum. Spicae masculae terminales, simplices vel 2—4 in fasciculum congestae, quandoque iterum ramosae et proliferae, lineares, 0,01—0,02 longae, 0,002—0,0025 latae. Folia perigonii imbricata, rotundato-obovata, obtusa, integerrima, basi inflata, apice patentia.

Differt a *Plagiochila Bantamensi* N. ab E. praeter magnitudinem, amphigastriorum defectu, foliis subarcuatis et perianthio longiori; a *Plagiochila superba* N. ab E. foliis basi cucullatis et perianthio elongato, non alato.

TABULA IV.

Fig. 1. *Planta naturali magnitudine; f.* 2. *folia rami primarii a dorso, octies aucta; f.* 3. *folia rami primarii a ventre, octies aucta; f.* 4. *areolatio folii, quadragies aucta; f.* 5. *perianthium cum folio involucrali et capsula in quatuor valvas dehiscente, quater auctum; f.* 6. *c'ater, ducenties auctus; f.* 7. *ramus plantae masculae in spicis fasciculatis florens, nat. magn.; f.* 8. *spica bifida plant. mascul. nat. magn.; f.* 9. *pars spicae masculae, octies aucta; f.* 10. *folium perigonii, tricies auctum; f.* 11. *antheridium evacuatum, in basi folii perigoniali reconditum, quinquagies auctum.*

§. 4. *Cristatae. Folia basi ventrali dilatata et vel omnia vel pleraque in cristam bilamellatam conniventia, denticulata. Perianthia involucro longiora.*

31. PLAGIOCHILA OBTUSA LINDBG. *Spec. Hep.* p. 42. t. 8. Caule repente; ramis erectis iterato-dichotomis subfastigiatis; foliis dense imbricatis divergentibus semicordato-ovatis subrotundisque obtusis, margine ventrali apiceque inaequaliter ciliato-dentatis, subtus in cristam longius ciliatam reflexis, dorsali fere toto reflexis serrato-dentatis; fructu terminali et in dichotomia; perianthio oblique obovato, ante apicem incurviusculo, antico margine alato, ala lata ciliato-dentata, ore compresso plicato oblique rotundato ciliato. *Syn. Hep.* p. 42.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. Herb. v. D. BOSCH.

32. PLAGIOCHILA CALVA N. ab E. in LINDBG. *Spec. Hep.* p. 27. t. 5. Caule repente foliato; ramis erectis subpinnatis, ramulis patenti-divergentibus; foliis imbricatis semiovato-oblongis obtusis, margine ventrali apiceque minute serrato-denticulatis, subtus basi dilatata in cristam bilamellatam nudam conniventibus; fructu terminali et e dichotomia, perianthio involucrum non superante obovato alato (ala angusta obsolete denticulata), ore obliquo dentato-ciliato. *Syn. Hep.* p. 43.

Habitat Javam. Syn. Hep.

33. PLAGIOCHILA REPANDA LINDBG. *Spec. Hep.* p. 62. et p. 160. t. 12. Caule repente diviso; ramis erectis laxis simplicibus, apice dichotomo-proliferis; foliis arcte imbricatis plano-distichis patenti-divergentibus, semiovato-oblongis obtusis integerrimis, margine ventrali basi latiore repandis, dorsali subplanis; fructu laterali; perianthio oblongo, margine postico repando, ore truncato-bilabiato denticulato. *Syn. Hep.* p. 43.

Habitat Javam. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

E. Madagascar adest in Herb. doct. BUSE. Plantas masculas legit doct. KORTHALS in Venezuela. Spicae, ramum medium cingentes, ovato-lanceolatae, ex 8—10 paribus foliorum compositae. Folia perigonialia dense imbricata, valde inflata, ovato-rotunda, integerrima, apice patula.

§. 5. *Dendroideae. Rami basi integri apice dichotomo-dendroidei.*

34. PLAGIOCHILA BELANGERIANA LINDBG. *Spec. Hep.* p. 109. t. 19. Caule repente; ramis erectis apicem versus dendroideo-ramosis; foliis imbricatis divergentibus, basi utrinque breviter decurrentibus reflexis dimidiato-ovatis obtusis (supremis patentibus ovato-ellipticis subacutis) denticulato-spi-

nulosis; fructu laterali; perianthio subrotundo compresso, ore truncato inciso-ciliato. *Syn. Hep.* p. 47.

Habitat Javam. Syn. Hep. In monte Slamat, altit. 4000′—6000′. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Ad rupes mont. Salak. Zollinger, coll. n. 3125. Herb. v. d. Bosch. Prope Gadok, altit. 1500′. Herb. Dz. et Mb., communicavit Cl. v. Hall.

Sect. III. *ASPLENIOIDEAE.*

Rami adscendentes vel erectiusculi vage ramosi. Folia subrotunda, integerrima vel minute dentato-ciliata. Perianthia (in pluribus ignota) praelonga.

§. 1. *Foliis subintegerrimis.*

55. PLAGIOCHILA COMATA N. ab E. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 60. t. 8. Caule repente diviso; ramis adscendentibus dichotomo-proliferis alatis; foliis subimbricatis semiverticalibus subrotundis ovato-falcatisque obtusis subintegerrimis, dorso decurrentibus, ex axillis inferis longissime fasciculato-barbatis; fructu dichotomiae innato; perianthio . . . *Syn. Hep.* p. 48.

Habitat Javam. Syn. Hep. — In insula Ternate. Herb. Reinwardt.

§. 2. *Foliis denticulato-ciliatis, perianthiis elongatis.*

56. PLAGIOCHILA ASPLENIOIDES M. et N. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 110. t. 23. Caule repente flagellifero; ramis erectis vel adscendentibus vage ramosis; foliis subimbricatis oblique patentibus decurvis obovato-rotundatis integerrimis denticulatisque, margine dorsali reflexo; fructu terminali; perianthio oblongo, apice dilatato compressoque decurvo, involucrum multo superante, ore truncato dentato-ciliato. *Syn. Hep.* p. 49.

β. *confertior;* magis ramosa; foliis imbricatis ovato-oblongis deflexiusculis denticulatis subintegerrimisque. Lindbg. l. c.

Habitat (Var. β.) Javam. Syn. Hep.

57. PLAGIOCHILA TRAPEZOIDEA Lindbg. *Spec. Hep.* p. 112. t. 22. Caule repente flagellifero; ramis adscendenti-erectis, apice recurvis prolifero-subramosis; foliis approximatis subverticalibus patenti-divergentibus, saepe heteromallis, ovato-trapezoideis duplicato-serrato-ciliatis longe decurrentibus, margine dorsali basi reflexis subintegerrimis; fructu terminali et e dichotomia; perianthio oblongo-clavato, ore truncato dentato-ciliato, involucrum multo superante. *Syn. Hep.* p. 50.

β. *tenera;* implexa; foliis distantibus obovatis, apice ciliato-serratis. l. c.

? *γ. major*; laxa at firmula; foliis longissime decurrentibus, toto ambitu serrato-ciliatis magis rotundatis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. *β.* etiam in Ternate. l. c.

Sect. IV. *HETEROMALLAE.*

Rami subsimplices, arcuati, rarius dichotomo-fasciculati vel pinnati. Folia heteromalla. Perianthia elongata.

§. 1. *Conjugatae. Folia opposita erecto-adpressa basi coadunata.*

38. PLAGIOCHILA BRAUNIANA N. ab E. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 117. t. 24. Caule repente; ramis adscendentibus flexuosis, apice innovando-ramosis; foliis approximatis verticalibus orbiculato-reniformibus oppositis connatis patentibus integerrimis; fructu terminali; perianthio obovato compresso reflexo, ore truncato denticulato. *Syn. Hep.* p. 51.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh.

39. PLAGIOCHILA OPPOSITA N. ab E. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 121. t. 25. Caule repente; ramis adscendenti-erectis prolifero-divisis stoloniferis; foliis subimbricatis verticalibus erecto-patulis oppositis coadunatis rotundato-cuneatis spinuloso-dentatis; fructu terminali; perianthio tubuloso-urceolato recurvo, ore compresso truncato ciliato-dentato. *Syn. Hep.* p. 51.

β. falcata; ramis falcatis. l. c.

γ. filiformis; foliis distantibus verticaliter patentibus obovato-orbiculatis, apice parce dentato-spinulosis. l. c.

Habitat Javam. Syn. ep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. In mont. Salak, Zoll. n°. 5560 et 5560 d. ex p. Herb. v. d. Bosch. Herb. Reinwardt. Var. *β.* Herb. Jungh. — Ternate. Herb. Reinwardt. Var. *γ.* Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

§. 2. *Secundae. Folia patentia vel divergenti-decurva retroflexa, margine plana.*

40. PLAGIOCHILA VARIEGATA Lindbg. *Spec. Hep.* p. 153. t. 33. Caule repente adscendente innovando subramoso; foliis per paria approximatis verticalibus oblongis patenti-divergentibus obtusis, margine utroque deflexis, apice subplanis integerrimis; fructu terminali lateralique; foliis involucralibus integris irregulariter dentatis; perianthio obovato, apice plicato, ore breviter dentato-ciliato. *Syn. Hep.* p. 54.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Buitenzorg. Herb. Miq.

Spicae masculae plures in eodem ramo, interrupte foliosae, ovatae, e 5 foliorum paribus compositae. Folia perigonialia rotundo-ovata, obtusa, basi inflata, apice patentia, repanda.

41. PLAGIOCHILA VARIABILIS v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief* III. p. 416. Dozy *Plagiochila Sandei* p. 6. Caule repente adscendente subsimplici; foliis per paria approximatis verticalibus oblongis patenti-divergentibus, marginibus planis, oblique truncatis vel emarginato-bidentatis; fructu ob innovationem laterali; foliis involucralibus oblongo-ovatis, apice denticulatis; perianthio oblongo-clavato, apice obsolete plicato, ore denticulato.

Habitat Javam. Herb. Jungh. Buitenzorg. Herb. Miq. Herb. v. d. Bosch.

Caespitosa. Caulis radiculis albidis e foliorum axillis repens, adscendens, 0,025 longus, cum foliis 0,003 latus, simplex aut sub involucro innovans. Folia per paria adproximata, verticalia, patenti-divergentia, in plantis robustis retroflexa, oblonga, linguaeformia, subaequilata, plana, basi convexa, dorso vix decurrentia, apice rotundata, obtusa, integerrima, truncato-acuta, retusa, repando-bicrenata et emarginato-bidenticulata. Cellulae parvae, rotundae, contiguae. Folia involucralia erecto-patula, oblonga, apice denticulata. Perianthium involucrum superans, cylindrico-clavatum, apice leviter plicatum, ore denticulato, dentibus conniventibus. Spica mascula ramum cingens, ovato-lanceolata, e paribus foliorum 4 constans. Folia perigonialia imbricata, e basi convexa ovato-lanceolata, margine dorsali unidentata, dente recto vel curvato, apice patula, truncato-bidentula.

Statura tenuiore, foliis magis planis, apice polymorphis, perianthiis longioribus et foliis perigonialibus a *Plagiochila variegata* Lindbg. diversa.

TABULA IV.

Fig. 1. *Plantae naturali magnitudine; f.* 2. *planta a dorso cum perianthio, decies aucta; f.* 3. *pars caulis a dorso, decies et quinquies aucta; f.* 4. *caulis a ventre visus, decies auctus; f.* 5. *pars caulis a ventre, decies et quinquies aucta; f.* 6. *tertura folii, centies aucta; f.* 7. *spica mascula, vicies aucta.*

42. PLAGIOCHILA SUBINTEGERRIMA N. ab E. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 129. t. 28. Caule repente adscendente ramoso; foliis per paria approximatis subverticalibus patenti-divergentibus deflexisque, convexis obovato-oblongis subintegerrimis; fructu ob innovationes dorsali; perianthio obovato clavato, basi incurvo, ore truncato ciliato. *Syn. Hep.* p. 54.

α. oblongifolia; caule laxo simplici vel bifido; foliis semiverticalibus suboppositis basique per paria subconnatis patentibus dissitis oblongis obtusis integerrimis. l. c.

β. major; caule majore prolifero-diviso; foliis latis obovatis recurvatis, apice subdenticulatis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. *β.* Herb. Buse.

43. PLAGIOCHILA KORTHALSIANA Molkb. *Mspt.* v. d. Sd. Lc. *in Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 416. Dozy *Plagiochila Sandei* p. 6. Caule repente; ramis erectis apice curvatis; foliis semiverticalibus erecto-patulis retroflexis ovatis obovatisve obtusis et acutiusculis, margine dorsali reflexis integerrimis, ventrali apiceque denticulatis; fructu terminali et laterali; perianthio compresso ovato oblongove nutante, ore truncato denticulato.

β. *robustior;* olivacea, magis prolifero-divisa, foliis secundis; perianthiis crebrioribus.

Habitat Javam. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Var. β. Herb. Jungh. Herb. v. d. Bosch.

Caulis repens. Rami erecti, subsimplices, curvati, 0,025 longi, 0,002 lati. Folia inferiora parva, distantia, rotundo-obovata, subintegerrima; superiora majora, subimbricata, semiverticalia, erecto-patula, ovata vel obovata; margo dorsalis integerrimus, reflexus, paullo decurrens; ventralis cum apice obtuso vel acutiusculo denticulatus, basi planus, integerrimus.

Var. β. coloris obscurioris. Rami proliferi. Folia subsecunda, margine utroque deflexa. Textura foliorum spissa, cellulae parvae, ovali-rotundae. Fructus terminalis et lateralis. Folia involucralia erecta, conformia. Perianthium nutans, compressum, ovatum vel ovato-oblongum, ore truncatum, denticulatum. Spicae masculae apice iterum foliosae, lineares. Folia perigonialia imbricata, subretroflexa, ovata, obtusa, basi inflata, apice erecto-patula, marginibus reflexis denticulatisque.

Proxima est *Plagiochila asplenioides* Var. β. *confertior*, a qua differt foliis acutiusculis perianthio breviore, ore tantum denticulato, spicis masculis linearibus.

Speciei nomen tribuit vir Doct. Molkenboer amici sui integerrimi Doct. P. W. Korthals, Naturae scrutatoris celeberrimi.

TABULA V.

Var. α. Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars rami a dorso, duodecies aucta; f.* 3. *ramus a ventre visus, septies auctus; f.* 4. *folium, decies et quinquies auctum; f.* 5. *textura folii, quinquagies aucta; f.* 6. *folium involucrale, decies et quinquies auctum; f.* 7. *perianthium, septies auctum.*

Var. β. f. 8. *planta magnitudine naturali; f.* 9. *ramus fructifer, septies auctus; f.* 10. *spica mascula, septies aucta; f.* 11. *folium perigoniale, vicies auctum.*

44. PLAGIOCHILA GENICULATA Lindbg. *Spec. Hep.* p. 151. t. 27. Caule repente; ramis adscendentibus prolifero-ramosis divaricatis; foliis distantibus verticalibus divergentibus subrotundo-obovatis, margine utroque reflexis, dorsali strictiusculis integerrimis, ventrali subarcuatis denticulato-spinulosis, apice oblique emarginato-bidentatis; fructu laterali; perianthio obliquo semirotundo, ore truncato inciso-ciliato. *Syn. Hep.* p. 55.

Habitat Javam, in monte Ungarang, altit. 3000′—5000′. Herb. Jungh.

45. PLAGIOCHILA RENITENS N. ab E. in LINDBG. *Spec. Hep.* p. 90. t. 17. Caule repente; ramis subsimplicibus arcuatim flexuosis; foliis imbricatis subsemiverticalibus erecto-patulis subsecundis oblique ovatis obovatisque convexis, margine dorsali reflexis strictiusculis integerrimis, margine ventrali apiceque minute denticulato-ciliatis; fructu laterali; perianthio obovato compresso, ore truncato denticulato. *Syn. Hep.* p. 55.

Habitat Javam. Syn. Hep.

46. PLAGIOCHILA FUSCA v. D. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Archief* III. p. 417. DOZY *Plagiochila Sandei* p. 6. Caule repente; ramis erectis apice curvatis; foliis subverticalibus patenti-divergentibus, saepe heteromallis, semiovatis decurrentibus, apice angustatis obtusis, margine dorsali strictis integerrimis reflexis, ventrali apiceque dentato-ciliatis; fructu terminali vel accedente innovatione laterali; perianthio oblongo compresso, ore truncato ciliato-denticulato.

Habitat Javam. Herb. JUNGH.

Caulis repens, fusco-nigricans. Rami erecti vel adscendentes, 0,04 longi, apice curvati, simplices vel ramosi, ramis erectis vel divaricatis. Folia inferiora parva, distantia, obovata; superiora, majora, fusca, imbricata, semiverticalia et subverticalia, patenti-divergentia, semiovata, cum caule et folio opposito 0,008 lata, plano-disticha vel heteromalla; margo dorsalis late reflexus, strictus, integerrimus, decurrens, sub apice serratus; ventralis rotundatus, cum apice obtuso dentato-ciliatus; eorum bases imbricatim tectae, planae, integerrimae, in heteromallis reflexae. Foliorum cellulae parvae, subrotundae. Fructus terminalis et ad speciem lateralis. Folia involucralia erecta, conformia. Perianthium involucrum superans, oblongum, compressum, ore truncatum, ciliato-denticulatum.

Differt a *Plagiochila arcuata* LINDBG, foliis basi strictis obtusis, perianthio non alato; a *Plagiochila heteromalla* LDBG, foliis longe dentato-ciliatis; a *Plagiochila trapezoidea* LDBG. recedit foliis simpliciter et longe dentato-ciliatis et perianthio breviore.

TABULA V.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars rami a dorso visa, decies aucta; f.* 3. *ejusdem a ventre visa, decies aucta; f.* 4. *ramus cum foliis secundis, octies auctus; f.* 5. *textura folii, vicies et quinquies aucta*; *f.* 6. *perianthium cum folio involucrali, quinquies auctum.*

In Herb Dz. et MB. adest *Plagiochilae* specimen unicum masculum e Java, quod *Pl. arcuatae* LDG. accedit. Differt autem ramulis divaricatis, foliorum margine dorsali non integerrimo, sed saepe toto denticulato, apice angustato obtuso, nec bispinoso. Spicae masculae solitariae, terminales, lineares. Folia perigonialia, e paribus 10—16, dense imbricata, subrotunda, circumcirca dentata, apice patula.

47. PLAGIOCHILA HETEROMALLA Lehm. et Ldbg. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 83. t. 18. Caule repente ramisque adscendentibus simplicibus bifidisve arcuatis subdivaricatis; foliis subverticalibus divergenti-deflexis heteromallis semicordato-oblongis convexis, margine reflexis, margine ventrali apiceque minute denticulato-ciliatis; fructu in ramulis terminali; perianthio elongato-pyriformi, apice compresso, ore truncato ciliato. *Syn. Hep.* p. 56.

Habitat Javam. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

48. PLAGIOCHILA ABIETINA N. ab E. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 134. t. 29. Caule repente adscendente ramisque pinnato-ramosis hirsutis, ramulis attenuatis decurvis; foliis subverticalibus erecto-patulis subimbricatis dimidiato-ovatis acutiusculis spinuloso-dentatis, margine dorsali reflexis, caulinis deflexis convexis; fructu in ramis terminali; perianthio campanulato compresso, ore truncato inciso-ciliato. *Syn. Hep.* p. 57.

β. *gracilenta;* fusco-lutescens elongata tenuis; ramulis foliisque subexplanatis laxioribus.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Var. β. In monte Ungarang. Herb. Jungh.

Spicae masculae apicales vel ramulum ex apice continuatum medio cingentes, ovato-lanceolatae. Folia perigonialia imbricata, ovata, apice patula, obtusa, dentata.

Varietas β. habitum referre videtur *Plagiochilae deflexiramae* Tayl. Haec tamen forma perianthii, quodque involucro est immersum, discrepat.

Sect. V. *CONNATAE.*

Omnes amphigastriatae. Folia cum amphigastriis subconnata. Perianthia triangularia angulis ciliatis.

49. PLAGIOCHILA CILIOLATA N. ab E. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 145. t. 30. Caule simplicissimo furcatove erecto; foliis approximatis patulis lanceolatis, marginibus reflexis, ventrali apiceque ciliato-dentatis; amphigastriis imbricatis ovato-orbiculatis denticulatis, basi cum foliis connatis; fructu terminali; perianthio pyramidali angulis oreque ciliatis. *Syn. Hep.* p. 60.

Habitat Javam. Syn. Hep. In monte Wayang, altit. 7000′. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

50. PLAGIOCHILA COSTATA N. ab E. in Lindbg. *Spec. Hep.* p. 145. t. 26. Caule procumbente, apice adscendente dichotomo; foliis arcte imbricatis dimidiato-cordatis, margine dorsali reflexo recto nudo, ventrali amphigastriisque imbricatis cordato-ovatis acutis dentato-ciliatis; fructu dichotomiae im-

posito; perianthio pyramidali-triangulo, angulis oreque truncato dentato-ciliatis. *Syn. Hep.* p. 61.

Habitat Javam. Syn. Hep.

Sect. VI. *DENDROIDEAE.*

Rami basi flagelliformes, apice dendroidei. Folia oblongo-elliptica, integerrima oblique bifida.

51. PLAGIOCHILA DENDROIDES N. ab E. in LINDBG. *Spec. Hep.* p. 146. t. 30. Caule horizontali interrupte ramoso flagilliferoque; ramis fasciculatis decurvis; foliis subhorizontalibus distiche patulis oblongo-ellipticis acutis oblique bidentatis integerrimis; fructu in ramis terminali; perianthio ovali marginato, ore bilabiato ciliato.. *Syn. Hep.* p. 61.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. In montosis Salak. ZOLLINGER n°. 3560 et 3560 d. ex. p. Herb. V. D. BOSCH.

V. SCAPANIA LINDBG.

52. SCAPANIA NEMOROSA N. ab E. *Hep. Eur.* III. p. 524. Foliis ciliato-dentatis, lobo utroque convexo obtuso, ventrali obovato obliquo, dorsali duplo minori incumbente; surculis dorso convexis rigidulis. *Syn. Hep.* p. 68.

Habitat Javam. Syn. Hep.

53. SCAPANIA RIGIDA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 69. Foliis apicem versus dentatis, lobo ventrali oblique obovato convexo decurvo acutiusculo, dorsali minori ovato-subquadrato mucronato-acuto convexo; perianthio compresso, ore truncato reflexo. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

54. SCAPANIA JAVANICA GOTTSCHE in *Natuurk. Tijdschr. v. Nederl. Indie* 1853. p. 575. ZOLLINGER *Systemat. Verzeichn.* I. p. 20. et 21. Caule adscendente flexuoso simplici; foliis bilobis argute denticulatis, lobo dorsali convexo cordiformi-trapezoideo, ventrali ovali reflexo-patente duplo majore apiceque plerumque obtuso (in foliis summis capituli, cellulis gemmiparis non laxis, acuto); perianthio elongato compresso oblique reflexo, ore denticulato; foliis involucralibus conformibus. GOTTSCHE l. c.

Habitat Javam. Cum *Jungermannia retusa* GOTTSCHE, ad rupes catarrhactarum montis Prabakti. ZOLLINGER, coll. sub n°. 3502. Herb. JUNGH. Herb. V. D. BOSCH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

55. SCAPANIA FERRUGINEA Lehm. et Ldbg. in *Syn. Hep.* p. 72. Foliis dense ciliatis dissitiusculis inaequaliter bilobis obtusis, lobo ventrali ovato, dorsali cordato; perianthio teretiusculo, ore inciso-ciliato connivente. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. In monte Mangalawangie. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

VI. JUNGERMANNIA LINN. (Char. em.)

§. 1. *Homomallae.*

Folia subsecunda, concava, aut integra, aut bidentula, basi dorsali antrorsum conversa. Amphigastria nulla. Perianthium in caule terminale, tri-quadrangulare, apice attenuatum, ore lacinulato.

56. JUNGERMANNIA CONTRACTA N. ab E. R. et Bl. *Hep. Jav.* in *Act. Acad. Nat. Cur.* XII. 1. p. 255. Caule procumbente flexuoso arhizo, apice innovante; foliis semiverticalibus adscendentibus, apice recurvis ovatis cuspidulato-mucronatis integerrimis, margine supero subrepando; perianthio oblongo plicato, ore ciliato; foliis involucralibus trifidis vel plurifidis dentatis. *Syn. Hep.* p. 79.

β. foliis margine supero non repandis. l. c.

γ. statura teneriori. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. α. Herb. Jungh. Herb. Dz. et Mb.

57. JUNGERMANNIA PILIGERA N. ab E. R. et Bl. *Hep. Jav.* in *Act. Acad. Nat. Cur.* XII. 1. p. 414. n°. 16 b. Caule ramoso, ramis reclinatis subsimplicibus; foliis succubo-imbricatis verticalibus adscendentibus complicato-bifidis, laciniis subaequalibus concavis subintegerrimis, apice setigeris fructu terminali; perianthiis pyramidato-quadrangulis, ore lacero-ciliatis. *Syn. Hep.* p. 81.

α. *major;* foliis dense succubo-imbricatis adscendentibus; perianthiis longioribus. l. c.

β. *minor;* foliis ut in praecedente; perianthio breviori ovato mucronato plicato-striato (ob innovationem infra apicem ortam dorsali). l. c.

γ. *tenerrima;* caule laxo subtili; foliis distantibus patulis non tam evidenter verticalibus, laciniis acutis mucronulo piliformi plerumque destitutis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. α. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Var. β. Herb. Jungh. Var. γ. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Cum perianthiis.

§. 2. *Communes.*

Folia semiverticalia aut subverticalia, vel oblique explanata, vel sursum con-

niventia, integra, bi-pluridentata, bi-trifida, aut setaceo-pluripartita, raro in ambitu denticulata serratave. Amphigastria vel desunt, vel ubi adsunt, foliis sunt aut conformia et aequalia vel diversiformia et minora, in latere ventrali caulis disticho-alterna. Perianthium in caule primario (saepe infra hoc innovante) terminale, subcylindricum, subclavatum, oblongum, ovatumve aut subglobosum (paucis elongato-pyramidale, tri-quadrangulare), plus minus, saltem ad os, plicatum. Involucri folia et amphigastria pauca, plerumque caulinis majora, magisque divisa, saepius dentata.

A. Integrifoliae.

Folia integra, plurimis et integerrima.

† Amphigastriatae.

58. JUNGERMANNIA SUCCULENTA Rich. *Mspt.* L. et Lindbg. in Lehm. *Pugill.* IV. p. 45. Caule repente stupaceo-radiculoso ramosiusculo; foliis verticalibus ovato-orbiculatis, apice reflexis leviter emarginatis; amphigastriis triangularibus, basi caulem amplectentibus, apice patentibus; perianthio obovato parvo, foliis involucralibus paene immerso, bilabiato, apice truncato, oris margine laevi. *Syn. Hep.* p. 84.

Habitat Javam. Ad craterem Tjiwidei. Herb. Jungh.

†† Examphigastriatae.

59. JUNGERMANNIA FLEXICAULIS N. ab E. in *Linn.* VI. p. 604. Caule prostrato flexuoso nudo, e ventre subflagellifero proligeroque; foliis subverticalibus erecto-conniventibus cordato-orbiculatis obliquis rotundatis integerrimis; fructu terminali; involucri foliis integris; perianthio ovato oblongove, apicem versus quadriplicato. *Syn. Hep.* p. 87.

β. *microphylla;* caule filiformi lineari angusto; foliis minoribus late amplectentibus; perianthio subcylindrico. l. c.

γ. *decipiens;* caule innovationibus laxis diviso; foliis plerisque patulis virentibus. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. α. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Herb. v. d. Bosch.

60. JUNGERMANNIA JUNGHUHNIANA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 87. Caule flagellifero, radiculis densis longis (pupureis) arctissime repente, infra apicem innovante; foliis dense imbricatis declivi-semiverticalibus oblique ovatis obtusis integerrimis, margine dorsali concaviusculo anguste reflexo; involucri foliis

integris, apice patulis repandis; perianthio anguste pyramidali triangulari plicatulo, involucro dimidio longiore. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Dz. et Mb. Buitenzorg. Herb. Miq.

61. JUNGERMANNIA RETUSA Gottsche in *Natuurk. Tijdschr. v. Nederl. Indië.* 1853. p. 575. Zollinger *System. Verzeichn.* I. p. 19. et 21. Amphigastriis nullis; caule adscendente subflexuoso radiculoso flagellifero, infra apicem innovante (novellis grandifoliis), surculis gracilibus erectis; foliis semiverticalibus distantibus obovatis patulis margine repandis; perianthio terminali exserto cylindrico-quadrangulari, apice laevi plicato; foliis involucralibus conformibus adpressis, apice patenti-recurvis. Gottsche. l. c.

Habitat Javam. Ad rupes catarractarum Prabakti, cum *Scapania javanica* Gottsche. Zollinger coll. n°. 3502. Herb. Jungh.

62. JUNGERMANNIA ARIADNE Tayl. in *Hb. Greville.* Lehm. *Pug. pl.* VIII. p. 9. Caule procumbente, sub involucro innovante, paullum ramoso radiculoso; foliis horizontalibus ovato-ellipticis subintegerrimis vel margine repandis; perianthio semi-immerso quadrangulari-prismatico, ore truncato. *Syn. Hep.* p. 674.

Habitat Javam. Ad pedem montis Prabakti, ± altit. 4000′. Zollinger. coll. n°. 1581. a.

63. JUNGERMANNIA TETRAGONA Lindbg. *Hepat. Jav.* in *Bot. Zeitung.* VI. 1848. p. 462. Zollinger. *System. Verzeichn.* I. p. 19. Caule flagellifero adscendente radiculis basi repente innovando subramoso; foliis semiverticalibus remotiusculis ovato-rotundatis integerrimis; perianthio exserto cylindrico-quadrangulari, ore bilabiato obsolete dentato. Lindbg. l. c.

Habitat Javam. Ad pedem montis Prabakti. Zollinger. coll. n°. 1581. b.

J. Junghuhnianae N. ab E. et *J. polyrrhizae* Hook. proxima, praeprimis diversa perianthio longiore angusto quadriplicato bilabiato. (Lindbg.)

64. JUNGERMANNIA POLYRHIZA Hook. *Mspt.* Lehm. et Ldbg. *Pug.* VI. p. 34. Caule procumbente subsimplice flagellifero; foliis semiverticalibus imbricatis ovato-rotundatis subundulatis integerrimis; perianthiis perichaetio semi-immersis ovato-cylindricis subarcuatis plicatis, ore truncatis denticulatis. *Syn. Hep.* p. 88.

Habitat Javam. Herb. Dz. et Mb.

65. JUNGERMANNIA TRUNCATA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 89. Caule procumbente flexuoso radiculoso, e prona parte prolifero-subramoso; foliis disti-

cho-patentibus ovatis truncato-obtusatis; involucralibus duobus conformibus, basi perianthio adnatis patulis; perianthio ovali laevi, ore lacero-inciso. *Syn. Hep.* l. c.

β. *tenerrima;* filiformis; foliis minutis distantibus. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. β. Teysm. in Herb. Dz. et. Mb.

B. Bidentes.

Folia apice saltem bidentata .... cava vel plana.

66. JUNGERMANNIA PUNICEA N. ab E. *Enum. plant. crypt. Jav.* I. p. 52. Caule brevi ramoso arcuato rigidulo, ramorum apicibus attenuatis flagellisque crassis repente, apice adscendente; foliis semiverticalibus subrotundis imbricatis concavis emarginato-bifidis, dentibus acutiusculis conniventibus; foliis involucralibus majoribus patulis dentatis, basi connatis; perianthio trigono-pyramidali plicato, ore dentato. *Syn. Hep.* p. 97.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh.

67. JUNGERMANNIA RECURVIFOLIA N. ab E. *Enum. plant. crypt. Jav.* I. p. 52. Caule repente flagellifero ramoso, ramis erectis; foliis verticalibus patenti-recurvis subquadratis late emarginatis, apicem versus inaequaliter dentato-ciliatis; foliis involucralibus binis dentato-laceris; perianthio oblongo subcompresso, ore connivente lacero-ciliato. *Syn. Hep.* p. 98.

Habitat Javam. Syn. Hep.

C. Barbatae.

Foliis bi-pluridentatis fissisve rigidulis, plus minus evidenter plicatis, plicis tot quot dentibus praedita sunt. Amphigastria, ubi adsunt, foliis haud multo minora, at teneriora, bifida, in ambitu saepe ciliato-incisa, cauli arcte adpressa.

68. JUNGERMANNIA ARMATA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 129. Caule erecto ramoso; foliis arcte imbricatis ovato-truncatis subconduplicatis duplicato-dentatis, apice bis-bifidis vel quadrifidis; amphigastriis magnis ovatis duplicato-dentatis bifidis; perianthio tereti attenuato incurvo; foliis involucralibus parvis conformibus. *Syn. Hep.* p. 129.

β. *elongata;* caule gracili; foliis laxis, denticulatis.

Habitat Javam. Var. α. Syn. Hep. Herb. Dz. et Mb. Var. β. Herb. Dz. et Mb.

69. JUNGERMANNIA HIRTELLA Weber. *Prodr.* p. 50. Caule erecto simplici vel dichotomo; foliis densissime confertis subverticalibus tripartitis, laciniis oblongo-lanceolatis sexfariam patenti-recurvis, marginibus reflexis ci-

liatis; amphigastriis folio multo minoribus bipartitis, laciniis lanceolatis divaricatis; perianthio terminali plicato-angulato. *Syn. Hep.* p. 150.

β. tenera; foliis laxis subsecundis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Mangalawangie, Wayang. Herb. Jungh. Herb. Dz. et Mb. Var. *β.* Herb. Jungh.

70. JUNGERMANNIA SETIGERA Lindb. *Syn. Hep.* p. 151. Caule repente flagellifero ramoso flexuoso; foliis verticalibus patenti-divergentibus vel subreflexis subrotundis, margine fissis in lacinias 2—6 capillares articulatas, basi folii indivisa duplo triplove longiores inaequales divaricatas, nonnumquam basi cilio uno alterove praeditas; amphigastriis conformibus, sed brevioribus, apice patulis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Repens in *Scapania ferruginea* L. et L. Herb. Jungh.

§. 3. *Bicuspides.*

Folia semiverticalia, pleraque bidentata, rarius tridentata, ample reticulata, plerisque parva, unde habitus gracilis. Fructificatio in ramulo proprio, sterilibus utplurimum breviori at crassiori, terminalis. Involucrum polyphyllum imbricatum, foliis interioribus majoribus profundiusque divisis et dentatis. Perianthum plerisque angustum, tenue, acutangulum ore lacero. Capsula numquam globosa.

* Amphigastriatae.

71. JUNGERMANNIA BOSCHIANA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Arch.* III. p. 521. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 7. Amphigastriata, flagellari-radicosa; caule ramoso, ramis adscendentibus; foliis subimbricatis crassiusculis concavis ovatis, apice obtusis acutisque rarius emarginatis; amphigastriis ovatis integris; trunco fructifero abbreviato; foliis involucri ovatis indivisis, apice denticulatis; perianthio ovato-oblongo plicato, ore dentato.

Habitat Javam. Ad terram cum *Jungermannia bicuspidata* Linn. et *Symphyogyna podophylla* M. et N. Herb. Jungh.

Caespites pallide rubelli. Caulis flagellis rhizomatoideis, crassis, albis repens, nudis aut squamulis minutis foliosis. Rami 0,005 longi et breviores, adscendentes, crassi, simplices aut parce ramosi. Folia concava, crassiuscula, ramo latiora, ovata, obtusa vel acuta, apice plana vel incurviuscula, integra, rarissime emarginato-bidenticulata; in ramis robustioribus imbricata, semi- et subverticalia, patentia, vel erecto-adscendentia. Amphigastria distantia, minuta, adpressa, ovata, obtusa, integerrima. Textura foliorum e cellulis amplis rotundo-quadratis, limitibus subtilibus intertitiisque angustis. Caulis fructifer brevissimus, subaphyllus, radiculis tenerrimis vestitus.

Folia involucralia majora, ovata, adpressa vel patula, indivisa; superiora magna, apice denticulata. Perianthium magnum, ovato-oblongum, plicato-trigonum, ore dentato.

Proximae sunt *Jungermannia heteromorpha* Lehm. et Ldbg. et *Jungermannia Francisci* Hook. Prior differt caule simplici, foliis rotundis; posterior foliis, amphigastriis et involucro bifidis.

Nomen dedi Viri amicissimi Doct. R. B. van den Bosch, de Flora Patriae summe meriti, qui conjunctis studiis cum Cel. Montagneo Lichenes Javanicos illustravit.

TABULA VI.

Fig. 1. Planta magnitudine naturali; f. 2. pars rami a dorso, tricies aucta; f. 3. pars rami a ventre visa, tricies aucta; f. 4. folium singulum, vicies et quinquies auctum; f. 5. textura folii, centies aucta; f. 6. planta cum perianthio, decies aucta; f. 7. folium involucrale internum, vicies et quinquies auctum.

* * Examphigastriatae.

72. JUNGERMANNIA BICUSPIDATA Linn. N. ab E. *Hep. Eur.* II. p. 251. Amphigastriis nullis; ramo florifero brevi aut longiusculo; caule procumbente plerumque laxiusculo; ramis sterilibus procumbentibus repentibusque aut adscendentibus subarhizis; foliis diametro caulis plerumque latioribus distantibus, aut imbricatis semiverticalibus ovato-orbiculatis, magis minusve concavis adscendentibusque, usque ad medium fere bifidis, sinu obtuso lacinis acutis magis minusve conniventibus; retis maculis amplis pellucidis interstitiis grossis; foliis involucralibus plurifariis, apice plerumque patulis bi-quinquefidis repandis serrulatisve, laciniis lanceolatis; perianthio tenui lineari, apicem versus complicato-triangulari, ore denticulato; capsula oblonga rufo-fusca. *Syn. Hep.* p. 138.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

Specimina nostra referenda sunt ad Formam A α. *vulgarem* N. ab E.

73. JUNGERMANNIA TRICUSPIDATA N. ab E. *Hep. Jav.* p. 51. Caule procumbente pinnatim ramoso; foliis dissitiusculis subhorizontalibus pellucidis late cuneiformibus profunde bi-trifidis, laciniis divergentibus angustis acutis; fructu . . . *Syn. Hep.* p. 144.

Habitat Javam. Syn. Hep.

VII. LOPHOCOLEA N. ab E.

§. 1. *Amphigastriis in folia decurrentibus.*

74. LOPHOCOLEA HASKARLIANA Gottsche. *Syn. Hep.* p. 155. Caule repente ramoso; foliis cuneato-oblongis laxis convexo-patulis, margine ventrali

apiceque vel apice tantum serrato-dentatis, margine dorsali reflexis; amphigastriis 2—4 dentatis, dentibus mediis majoribus, utroque vel altero tantum latere in folium subjacens descendentibus; perianthio parvo triquetro late alato, ore alaque dentato; foliis involucralibus conformibus magis dentatis. *Syn. Hep.* p. 155.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Buitenzorg. Herb. MIQ. — In monte Klabat insulae Celebes. Herb. REINWARDT.

§. 2. *Amphigastriis discretis.*

* Foliis integerrimis distincte bidentatis.

75. LOPHOCOLEA MOLLIS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 158. Caule procumbente ramoso; foliis semiverticalibus amphigastriisque patentibus liberis ovatis emarginato-bidentatis, dentibus subulatis patulis; fructu terminali; foliis amphigastriisque magnis convolutis bidentatis; perianthio prismatico, angulis angustissime alato, ala uno alterove dente praedito, ore lacinato-dentato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

76. LOPHOCOLEA BIDENTATA N. ab E. *Hep. Eur.* II. p. 527. Caule elongato parce ramoso; foliis ovato-triangularibus explanatis laxis pallidis, sinu sublunato, dentibus subobliquis acutis; amphigastriis folio multo minoribus liberis distantibus bipartitis, laciniis profunde bifidis lineari-angustis integerrimis aut inciso-dentatis; perianthio mox laterali subsessili, angulis ala nulla, ore laciniato-dentato; involucri foliis subconformibus acute bifidis subdentatis. *Syn. Hep.* p. 159.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH.

** Foliis dentatis.

77. LOPHOCOLEA HORRIDULA v. D. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Arch.* III. p. 417. DOZY *Plagiochila Sandei* p. 7. Caule repente radiculoso ramoso; foliis adproximatis subhorizontalibus subquadrato-ovatis spinuloso-ciliatis, dorso muricatis, apice integris et bidentatis, laciniis acutis; amphigastriis bidentatis liberis; fructu terminali; perianthio clavato-cylindrico, tota superficie muricato, apice subplicato, ore 5-fido.

Habitat Javam. Herb. JUNGH. TEYSM. in Hb. Dz. et MB. Buitenzorg. MIQ.

Plantula olivacea, ramosa, subdichotoma, 0,015 longa, 0,001 lata et angustior, radiculas fasciculatas, longas, albidas e caule trudens. Folia subhorizontalia, contigua et laxe imbricata, quadrato-ovata, bidentata, dentibus acutis, vel etiam indivisa, circumcirca spinuloso-ciliata. Amphigastria minutissima, libera, ovata, bidentata, laciniis acutis, ciliatis. Textura foliorum e cellulis parvis constans, ovalibus quadratisque, interstitiis angustis discretis; dorsum papillis

elevatis conicis, opacis, 1—2-cellularibus munitur, in ventre deficientibus. Fructus in ramulo terminalis. Involucrum e paribus foliorum tribus compositum; folia reliquis majora, subverticalia, profunde bidentata; margines utrinque deflexi. Amphigastria involucralia tria, oblongo-ovata, bidentata. Perianthium 0,002 longum, densius longiusque muricatum, tereti-clavatum, apice obsolete plicatum, ore quinquefido, laciniis rectis, lanceolatis, ciliatis. Spica mascula in planta fructifera, linearis; folia perigonialia imbricata, ovata, basi inflata, dorso glabra, apice bidentata, dentibus acutis, ciliatis, patenti-reflexis.

Proxima *Lophocoleae muricatae* N. ab E. Differt nostra planta: caule repente, foliis magis ovatis, perianthio cylindrico, toto muricato.

TABULA VI.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso, quadragies aucta; f.* 3. *a ventre, quadragies aucta; f.* 4. *textura folii a dorso visa, centies et quinquagies aucta; f.* 5. *amphigastrium caulinum, ducenties auctum; f.* 6. *ramus fructifer, sexagies auctus; f.* 7. *ramus cum spica mascula, sexagies auctus.*

In Herb. Dz. et Mb. asservantur frustula *Lophocoleae*, colore flavo, foliis subhorizontalibus, imbricatis, ovatis, apice rotundis, margine toto longe ciliatis, ciliis 4—5-cellularibus, articulatis, margine dorsali in caulem paulisper descendentibus, ventrali basi rotundatis. Textura e cellulis amplis sexangulari-rotundis, limitibus contiguis. Amphigastria, a radicellis aegre distinguenda, libera videntur et ciliata. — *Lophocolea Orbigniana* M. et N. ab hac differt foliis brevioribus et amphigastriis.

VIII. CHILOSCYPHUS CORD. DUM. N. AB E.

§. *Amphigastriis in folia decurrentibus (coadunati).*

α. Perfoliati, foliis suboppositis margine dorsali basi connatis.

78. CHILOSCYPHUS DECURRENS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 175. Caule procumbente subramoso; foliis ovatis obtusis subintegerrimis subrepandisve splendentibus, margine dorsali basi in dorso caulis cum folio opposito limbo tenui connato; amphigastriis imbricatis orbiculato-quadratis denticulatis (dentibus mediis majoribus, sinu rotundiusculo discretis) utrinque cum foliis subjectis connatis; perianthio campanulato, ore longe laciniato; foliis involucralibus apice subbidentatis, toto margine lacinulato-dentatis; amphigastrio involucrali ovali bidentato, altero latere tantum cum folio usque ad medium fere connato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. — In monte Batu Lanté insulae Sumbawa, altit. ± 4500'. Zollinger, coll. n°. 3400'.

79. CHILOSCYPHUS BADUINUS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 174. Caule procumbente simplici flexuoso; foliis horizontalibus cuneatis, margine ventrali ar-

cuato per leviorem sinum in apicem emarginato-bidentatum abeuntibus, margine dorsali rectiusculo, basi in dorso caulis medio cum folio opposito limbo saccato connatis; amphigastriis imbricatis transversalibus cum foliis subjacentibus angusta projectura utrinque connatis, margine dentato-ciliatis, dentibus (utroque margine 8 recurvis) binis mediis majoribus, sinu rotundiusculo discretis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

β. foliis integerrimis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

80. CHILOSCYPHUS SUCCULENTUS Gottsche. *Muscor. Hepat. Species nov. Javan.* in *Natuurk. Tijdschr. v. Nederl. Indië.* 1853. p. 576. Zollinger. *System. Verzeichn.* I. p. 19 et p. 21. Caule procumbente subramoso; foliis horizontalibus explanatis vel paulo assurgentibus, cellulis prominentibus turgidis, obcuneatis, margine ventrali recto, apice truncato vel bidentulo (angulo utroque in denticulum producto), margine dorsali recto, cum basi dorsali folii alterius lateris limbo tenui subconnato; amphigastriis contiguis transversalibus quadratis, cum foliis subjacentibus tenui projectura utrinque connatis, apice sinu lunato-emarginato bidentato, margine laterali 2—3 dentibus recurvis magnis praeditis. Gottsche l. c.

Habitat Javam. Ad arbores putridas montis Prabakti. Zollinger coll. n°. 3513. Buitenzorg. Herb. Miq. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

β. foliorum bases dorsales discretae.

81. CHILOSCYPHUS ASELLIFORMIS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 176. Caule prostrato subdichotomo apiceque innovante; foliis oblique decurrentibus erecto-curvatis oblique orbiculatis, sulco longitudinali sinuosis, margine ventrali curvo, dorsali repando-reflexo (interdum dentato), apice bi-tri-dentato-ciliato; amphigastriis imbricatis, utrinque angusto limbo connatis, orbiculato-transversalibus bidentatis; perianthio ovato-campanulato sinuoso, ore aperto laciniato; foliis involucralibus in perichaetium monophyllum alte connatis. *Syn. Hep.* l. c.

Formae variantes inveniuntur:

α. margine dorsali foliorum reflexo integerrimo; ventrali integerrimo, apice binis dentibus majoribus, uno alterove denticulo parvo secutis. l. c.

β. margine dorsali reflexo, 9—10 ciliis et dentibus armato, ventrali interdum denticulis nonnullis, apice 4-dentato, dentibus longioribus ciliiformibus. l. c.

γ. foliis subdentatis. l. c.

δ. amphigastriis dentibus obsoletis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. — Var. α. In monte Batu Lanté insulae Sumbawa, altit. ± 4500'. ZOLLINGER coll. n°. 3400.

82. CHILOSCYPHUS TRAPEZIOIDES v. D. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Arch.* III. p. 417. DOZY *Plagiochila Sandei.* p. 7. Caule rigidulo repente, vage ramoso adscendente flexuoso; foliis semiverticalibus conniventibus imbricatis ovato-trapezioideis, apice obtuso integerrimo, margine dorsali rectiusculis, basi undulatis, ventrali arcuatis, basi 2—3 dentatis; amphigastriis subimbricatis ovato-rotundis sexangulari-dentatis, marginibus et apice inter dentes aequaliter sinuatis, basi altero latere folio connatis; foliis involucralibus bilobis; fructu . . .

Habitat Javam. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

Rigidulus, fusco-rubellus, subteres, 0,045 longus, ex amphigastriorum dorso radiculis simplicibus vel fasciculatis, brevibus, albidis repens, cum foliis 0,0025 latus. Rami vagi aut fasciculati, adscendentes, recurvati. Folia dense imbricata, semiverticalia, convexiuscula, conniventia vel apicibus foliorum oppositorum imbricata (unde forma teretiuscula); margo dorsalis rectiusculus, integerrimus, basi undulatus; ventralis arcuatus, basi integerrimus vel 1—2 dentatus; apex obtusus, integerrimus. Amphigastria magna, adpressa, contigua vel imbricata, ovali-rotunda, angulis vel dentibus vulgo sex, sinulis aequalibus ubivis discretis; basis decurrens et altero latere cum basi ventrali folii subjacentis connata. Foliorum compages fragilis; cellulae parvae, poriformes, distantes. Involucrum subsessile. Folia involucralia quadrato-oblonga, apice biloba.

Chiloscyphus hexagonus N. ab E. proximus, differt caule prostrato, foliis orbiculatis.

TABULA VII.

Fig. 1. Planta magnitudine naturali; f. 2. pars rami a latere visa, decies aucta; f. 3. folia explanata a dorso visa, decies et quinquies aucta; f. 4. rami pars a ventre visa, decies et quinquies aucta; f. 5. amphigastrium, tricies auctum; f. 6. textura amphigastrii, sexagies aucta; f. 7. folium involucrale, tricies auctum.

83. CHILOSCYPHUS TJIWIDEIENSIS v. D. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 418. DOZY *Plagiochila Sandei.* p. 7. Caule repente vage ramoso; foliis subhorizontalibus ovatis, apice obtuso plano integerrimo, margine dorsali longe decurrentibus, ventrali basi integris vel subdentatis; amphigastriis adproximatis ovatis, utrinque subtridentatis, apice sinu angulari bifidis, laciniis subincurvis acutis, basi altero latere cum folio subjacente connatis; fructu . . .

Habitat Javam. Ad craterem Tjiwidei. Herb. JUNGH.

Caulis 0,04 circiter longus, flexuosus, subsimplex aut parce ramosus, radicularum fasciculis longis, purpureis, e caule pullulantibus, repens. Folia planiuscula, subimbricata, horizontalia, ovata, obtusa, conniventia; margo dorsalis arcuatus, longe in caulem decurrens, integerrimus; ventralis rotundatus, integerrimus vel basi subdenticulatus. Amphigastria adproximata, patula, ovata, utrinque subtridentata, apice sinu obtuso, angulari, bifida, laciniis subacuminatis, incurvis; basis decurrens, altero latere cum folio connata. Textura foliorum e cellulis constat satis magnis, rotundis, limitibus subtilibus, fere contiguis.

A praecedente foliis decurrentibus et amphigastriorum forma satis distinctus.

TABULA VII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a latere visa, decies et quinquies aucta; f.* 3. *pars caulis cum foliis explanatis a dorso, tricies et quinquies aucta; f.* 4. *pars caulis cum foliis explanatis a ventre visa, tricies aucta; f.* 5. *textura folii, sexagies aucta; f.* 6. *amphigastria a latere visa, vicies et quinquies aucta.*

84. CHILOSCYPHUS COALITUS N. ab. E. *Syn. Hep.* p. 180. Caule repente vage ramoso; foliis horizontalibus ovato-quadratis truncato-bidentatis, dentibus subulatis; amphigastriis in folii marginem ventralem utrinque late decurrentibus quadri-sexdentatis; perianthio obovato, ore quadridentato; calyptra demum longe exserta. *Syn. Hep.* l. c.

β. affinis; foliis brevioribus fere quadratis, dentibus minoribus; amphigastriis transversalibus quadridentatis. l. c.

γ. tener; foliis cuneiformibus subulato-bidentatis; amphigastriis subquadridentatis, scilicet dentibus lateralibus brevissimis. l. c.

Habitat Javam (Var. *β.* et *γ.*). Syn. Hep. Herb. Junghi. Buitenzorg, Herb. Miq. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. — In monte Klabat insulae Celebes. Herb. Reinwardt. Var. *γ.* In monte Salak. Zollinger coll. n°. 5560. d. ex p.

85. CHILOSCYPHUS COMBINATUS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 182. Caule repente subramoso; foliis horizontalibus ovato-cuneiformibus planis, apice emarginato-tridentatis; amphigastriis in folii marginem anguste decurrentibus bifidis, laciniis incisis (plerumque) tridentatis; fructu ... *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Junghi. — Specimina pauca.

86. CHILOSCYPHUS ARGUTUS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 183. Caule repente subramoso; foliis subimbricatis horizontalibus subquadratis vel elongato-quadratis, apice rotundo acute pluri- (5-7-9) dentatis; amphigastriis altero latere cum folio connatis parvis distantibus bipartitis, laciniis subulatis, basi

extrorsum unidentatis; perianthio cylindrico-triquetro, ore trilobo ciliato-dentato. *Syn. Hep.* p. 185.

β. (δ). amphigastriis obsoletis. l. c.

γ. (ε). *subtilis;* status junior et rami novelli laxius foliis obsiti. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. α. Herb. JUNGH. Buitenzorg. Herb. MIQ. TEYSM. Herb. Dz. et MB. Var. γ. in monte Salak. ZOLLINGER coll. n°. 5560 d. ex p.

§. 2. *Amphigastriis in folia non decurrentibus (liberis).*

87. CHILOSCYPHUS ZOLLINGERI (?). GOTTSCHE in *Natuurk. Tijdschr. voor Nederl. Indië.* 1855. p. 576. ZOLLINGER. *Systemat. Verzeichn.* I. p. 19. et p. 21. Caule repente subramoso; foliis subimbricatis horizontalibus subovatis vel ovato-quadratis, apice rotundato bi, tri-spinulosis (inter dentes retusis); amphigastriis liberis parvis distantibus bipartitis, laciniis subulato-acutis, margine laterali uni- (raro bi) dentatis; fructu . . . GOTTSCHE. l. c.

Habitat Javam. Ad rupes flum. Tjidurian prope Tjikoya in planitie. ZOLLINGER coll. n°. 541.

Differt a Ch. *arguto* et *Endlicheriano*, quibus proximus, foliorum forma breviori et latiori et denticulatione, praesertim autem amphigastriis liberis, in folium non decurrentibus (GOTTSCHE).

88. CHILOSCYPHUS RIGIDULUS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 187. Caule repente ramoso rigidulo; foliis subhorizontalibus ovatis plano-adscendentibus emarginato-bidentatis subrepandis; amphigastriis liberis distantibus ovatis profunde bifidis, laciniis acutis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et. MB.

89. CHILOSCYPHUS PALLESCENS N. ab E. *Hep. Eur.* II. p. 369. Caule procumbente repente divaricato-ramoso; foliis explanatis ovato-subquadratis retusis obtusisve pallidis, retis limitibus subtilibus; amphigastriis liberis distantibus ovatis bifidis subintegerrimis; involucri foliis binis bidentatis; perianthio profunde trifido, laciniis spinoso-dentatis; calyptra conspicua, perianthio plerumque longiore. *Syn. Hep.* p. 187.

Habitat Javam. Syn. Hep.

90. CHILOSCYPHUS STYGIUS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 189. Caule subramoso flaccido repente subalato; foliis mollissimis, basi longe decurrentibus ovato-subrotundis obtusis retusisve, marginibus deorsum involutis; amphigastriis indistinctis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

SUBTRIBUS 4.

TRICHOMANOIDEAE N. AB E.

IX. CALYPOGEIA RADDI.

91. CALYPOGEIA BIDENTULA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 199. Caule repente ramoso; foliis horizontalibus arcte imbricatis oblique ovatis, apice contracto obtuse bidentatis integrisve; amphigastriis distantibus subrotundis obtuse bilobis; fructu . . . (flagellis ventralibus nullis). *Syn. Hep.* l. c.
Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Dz. et Mb.

X. LEPIDOZIA N. AB E., L. ET G.

I. Microphyllae.

Folia amphigastriaque minutissima, illa obsolete quadridentata, quadrifida et quadripartito-palmata, amphigastria bis bifida. Perianthium dentatum.
92. LEPIDOZIA SUBINTEGRA LINDBG. *Syn. Hep.* p. 201. Caule erecto regulariter pinnatim composito decompositove arhizo; ramis decurvis dichotomis, apice capillaribus arhizis; foliis caulinis distantibus appressis cordato-triangularibus concavis squamaeformibus, rameis erecto-patentibus, omnibus subintegerrimis, obsolete 2-3-dentatis; amphigastriis similibus; involucri foliis apice denticulatis, margine subintegerrimis; perianthio . . . LINDENBERG et GOTTSCHE *Species Hepaticarum.* p. 10. t. 1.
Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et Mb.
93. LEPIDOZIA SUPRADECOMPOSITA LINDBG. *Syn. Hep.* p. 202. Caule repente pinnatim supradecomposito arhizo, ramis decurvis descendentibus, apice capillaribus radicellatis; foliis remotiusculis subverticalibus elongatis oblongo-quadratis brevioribusque oblique ovatis patulis, acute bi-quadridentatis; amphigastriis minutis appressis quadratis obsolete quadridentato-crenatis subintegerrimisque; perianthio subrecto cylindrico; foliis involucralibus ovatis, ad quartam partem bifidis. *Spec. Hep.* p. 14. t. 2.
β. Haskarliana; foliis margine dorsali gibboso-arcuatis, apice magis incurvis. l.c.
Habitat Javam. Syn. Hep. Var. *α*. Herb. JUNGH. Var. *β*. Ad craterem Tjiwidei. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et Mb.
94. LEPIDOZIA TRICHODES N. ab. E. *Syn. Hep.* p. 203. Caule erecto regulariter alternatim pinnatim composito arhizo; ramis subsimplicibus decurvis; apice attenuatis; foliis distantibus subquadratis amphigastriisque late

quadratis inaequaliter quadrifidis; involucri foliis crinitis; perianthio pyramidali triquetro subrecto, ore denticulato. *Spec. Hep.* p. 19. t. 5.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH.

II. Communes.

Folia et amphigastria vel quadridentata vel quinquefida, integerrima, rarius paucidentata. Perianthium dentatum.

95. LEPIDOZIA WALLICHIANA GOTTSCHE. *Syn. Hep.* p. 204. Caule procumbente regulariter subsimpliciter pinnato; ramis patentibus decurviusculis, apice attenuatis flagelliferis; foliis caulinis distantibus oblongo-quadratis tri-quadripartitis, rameis approximatis elongatis 2-3-fidis, dentibus subulatis; amphigastriis minutis patentissimis subquadratis tri-quadrifidis; perianthio . . . *Spec. Hep.* p. 27. t. 4.

β. *gracilis;* 0,045 longa, ramis foliisque magis distantibus et decurvis.

Habitat Javam. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Buitenzorg. Herb. MIQ. Herb. JUNGH. Var. β. Ad craterem Tjiwidei. Herb. JUNGH.

Folia involucralia ovata, inciso-ciliata. Perianthium cylindricum, subarcuatum, apice attenuatum, plicatum, ore ciliato-dentato.

96. LEPIDOZIA REPTANS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 205. Caule repente pinnatim composito decompositove; ramis saepe flagellaribus; foliis decurvis subquadratis acute (bi-) tri-quadridentatis; amphigastriis subquadratis bi-tri-quadrifidis; foliis involucralibus ovatis truncatis inaequaliter 4-denticulatis; perianthio incurvo, ore dentato. *Spec. Hep.* p. 31. t. 5.

β. (δ) *tenera;* gracilis subpinnata; ramulis attenuatis capillaceis; foliis distantibus amphigastriisque acute 2-3-fidis, flagellorum subulatis bifidisque. l. c.

Habitat (Var. β.) Javam. Syn. Hep.

97. LEPIDOZIA CORDATA LINDBG. *Syn. Hep.* p. 207. Caule procumbente simpliciter pinnato; ramis decurvis, apice capillaceo-attenuatis; foliis verticalibus oblique cordato-ovatis convexis integerrimis, apice quadrifidis, laciniis brevioribus latis obtusiusculis; amphigastriis magnis subimbricatis cordatis convexis, margine subangulatis, apice angustato breviter quadrifidis, laciniis subinaequalibus subinflexis; fructu . . . *Spec. Hep.* p. 40. t. 7.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH.

98. LEPIDOZIA QUADRIDENS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 209. Caule erecto simpliciter pinnato, apice incrassato; ramis brevibus, inferiorum nonnullis apice attenuatis; foliis semiverticalibus late rotundo-quadratis convexis amphigastriis-

que subquadratis quadrifidis; laciniis acutis incurvis, exterioribus extrorsum subunidentatis; foliorum ovatis, amphigastriorum lanceolatis; fructu . . . *Spec. Hep.* p. 51. t. 8.

Habitat Javam. Syn. Hep. Ad craterem Tjiwidei. Herb. Jungh.

III. Incisae.

Folia et amphigastria inaequaliter (nonnullis obsolete) quadrifida, laciniae et margines serrato-ciliatae. Perianthium denticulatum.

99. LEPIDOZIA CLADORHIZA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 210. Caule erecto pinnato; ramis subsimplicibus deflexis attenuatis, apice radicantibus; foliis laxe imbricatis semiverticalibus ovato-falcatis subcomplicatis ciliato-denticulatis, acumine subbidentato; amphigastriis cordato-triangularibus dentato-ciliatis; fructu . . . *Spec. Hep.* p. 54. t. 9.

Habitat Javam. Syn. Hep.

100. LEPIDOZIA HOLORHIZA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 210. Caule prostrato pinnato; ramis subsimplicibus, apice filiformi radicantibus; foliis verticalibus imbricatis subcomplicatis amphigastriisque reniformi-transversalibus inciso-ciliatis; fructu . . . *Spec. Hep.* p. 55. t. 9.

β. *laxa;* caule filiformi, longo, tenero. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Ad craterem Tjiwidei. Herb. Jungh. Herb. Dz. et Mb. Celebes. Herb. Reinw.

Folia involucralia ovata, obtusa, denticulata. Perianthium rectum, cylindricum, apice plicatum, ore dentato.

IV. Capillares.

Folia et amphigastria profunde 5-6-8-partita; laciniae capillares. Perianthium laciniato-ciliatum.

101. LEPIDOZIA NEESII Lindbg. *Syn. Hep.* p. 212. Caule repente bipinnato supradecompositove, ramulis patentibus; foliis subverticalibus imbricatis obovato-quadratis 5-6-partitis, laciniis angustis capillaribus acutis articulatis, apice incurvis; amphigastriis ovato-rotundis, ad basin 5-6-partitis; involucri foliis intimis connatis perianthiique ore laceris. *Spec. Hep.* p. 64. t. 12.

Habitat Javam. Syn. Hep. Holle, Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Buitenzorg. Herb. Miq.

102. LEPIDOZIA GONYOTRICHA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 521. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 7. Caule prostrato bipinnatim ramoso; foliis verticalibus tripartitis, laciniis capillaribus obtusis articulatis, e

basi geniculata patenti-erectis substrictis; foliis ramorum imbricatis; amphigastriis subbipartitis; involucri foliis liberis ovatis inciso-ciliatis; perianthio cylindrico arcuato, versus apicem attenuato plicato, ore ciliato.

Habitat Javam. In ligno putrido cum *Lepidozia Wallichiana* Gottsche et *Chiloscypho rigidulo* N. ab E. Herb. Jungh.

Caespitosa. Caulis 0,005 longus, cum foliis 0,0001 latus, prostratus, bipinnatim vel inordinate pinnatim ramosus. Ramuli patentes, obtusi, rarius attenuati. Folia verticalia, caulina dissitiuscula, ambitu obovato-quadrata, tripartita, laciniis e basi geniculata substrictis, capillaribus, articulatis, obtusis, e serie simplici cellularum 3—4 contiguarum compositis. Amphigastria foliorum longitudinem aequantia, bipartita. Folia et amphigastria ramorum obtusorum magis imbricata, in ramis attenuatis dissita, saepe indivisa, capillaria. Fuctus lateralis, sessilis. Folia involucralia libera, ovata, inciso-ciliata; ciliis versus apicem longioribus, hic illic subdenticulatis. Perianthium pro plantula magnum, cylindricum, arcuatum, versus apicem attenuatum, plicatum, angulis obtusis, ore ciliato.

Differt a *Lepidozia Neesii* Ldbg. minutie, foliorum amphigastriorumque laciniis paucioribus, strictiusculis, quadri-cellularibus; foliis involucralibus liberis.

TABULA VI.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars rami a dorso visa, centies aucta; f.* 3. *folium singulum, tricenties auctum; f.* 4. *ramus cum perianthio, decies et quinquies auctus; f.* 5. *folium involucrale internum, quinquagies auctum; f.* 6. *perianthium cum foliis involucralibus, vicies et quinquies auctum.*

XI. MASTIGOBRYUM. N. ab E., L. et G.

A. Folia integra.

103. MASTIGOBRYUM DISTANS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 216. Caule horizontali dichotomo; foliis subdistantibus imbricatisve subhorizontalibus subexplanatis oblongo-orbiculatis oblongisve obtusis, apice incurvis, minute crenulatis; amphigastriis dissitis reniformibus patulis integris, apice reflexis minute crenulatis basive hastatis vel denticulo uno alterove instructis; perianthio . . . Lindbg. *Spec. Hep.* p. 4. t. 1.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh.

104. MASTIGOBRYUM ALTERNIFOLIUM N. ab E. *Ms. Syn. Hep.* p. 216. Caule fibrillis longissimis repente subsimplice laxo subeflagellari; foliis distantibus horizontalibus convexiusculis ovato-oblongis et subrotundis decurrentibus integerrimis obsoleteve emarginatis; amphigastriis remotis patulis reniformi-rotundis integerrimis; fructu . . . *Spec. Hep.* p. 5. t. 2.

β. *confertius;* fuscescens, flagelliferum. l. c.

Habitat Javam (Var. β.). Syn. Hep. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Herb. v. D. BOSCH.

Folia vel integerrima vel toto ambitu crenulato-denticulata, qua nota adpropinquant *Mastigobryo celluloso* LDBG. Var. β.

105. MASTIGOBRYUM VITTATUM GOTTSCHE. *Syn. Hep.* p. 216. Caule repente subramoso parce flagellifero; foliis approximatis horizontalibus oblongis divergentibus integerrimis obtusis, apice rotundatis truncatis vel retusis, raro subacutis, basi media linea cellularum elongatarum vittatis; amphigastriis remotis ovatis arcte appressis, apice rotundis integerrimis; perianthio . . . *Spec. Hep.* p. 6. t. 2.

Habitat Javam. Syn. Hep. Ad craterem Tjiwidei. Herb. JUNGH. In *Filice* quadam. ZOLLINGER. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Herb. v. D. BOSCH.

Haud raro occurrit foliis apice bi-tridenticulatis, cujusmodi specimina etiam vidi ex insulis Mauritii, Borboniae, Madagascar et e Promont. Bon. Spei in Herb. v. D. BOSCH.

106. MASTIGOBRYUM LORICATUM N. ab E. *Syn. Hep.* p. 217. Caule horizontali dichotomo divaricato; foliis subhorizontalibus arcte imbricatis convexis oblique cordato-ovatis obtusis denticulatis; amphigastriis imbricatis reniformibus subcrenulatis; fructu . . . *Spec. Hep.* p. 12. t. 4.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

B. Folia bifida.

107. MASTIGOBRYUM DIVARICATUM N. ab E. *Syn. Hep.* p. 219. Caule horizontali dichotomo-divaricato; foliis subdistantibus horizontalibus explanatis oblongo-obcuneatis oblique bidentatis integerrimis, dentibus divergentibus acutis; amphigastriis minutis distantibus orbiculato-quadratis appressis integerrimis obtuse tridentatisque; fructu . . . *Spec. Hep.* p. 19. t. 5.

Habitat Javam, Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Specimina pauca.

C. Folia tridenticulata.

a. Amphigastria integerrima.

108. MASTIGOBRYUM DENSUM v. D. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Arch.* III. p. 418. DOZY *Plagiochila Sandei.* p. 8. Caule procumbente dichotomo; foliis dense imbricatis ovato-oblongis planiusculis, apice 3-dentatis, dentibus-

que brevibus integerrimis; amphigastriis adproximatis parvis semicircularibus convexis patulis, apice reflexis integris; fructu . . .

Habitat Javam. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

Caespitosum, lutescens. Caulis procumbens, 0,017 longus, cum foliis 0,0023 latus, ob folia decidua hic illic saepe denudatus. Rami dichotomi, patenti-divaricati. Flagella longiuscula, simplicia vel bifida, foliolis minutissimis, distantibus, adpressis vestita. Folia explanata planiuscula, dense imbricata, semiverticalia, ovato-oblonga; margo ventralis rectiusculus vel subarcuatus, basi vix aut non dilatatus; margo dorsalis rotundior; apex rotundatus, tridentatus, dentibus brevibus, acutis, integerrimis. Textura foliorum e cellulis parvis, aequalibus, ovali-quadratis. Amphigastria parva, subdistantia, caulis latitudinem aequantia, quandoque cum folio proximo basi connata, patula, semirotunda vel paulo longiora, medio convexa, marginibus subrecurvis, apice magis reflexo, subintegerrimo.

Foliis densius imbricatis, aequaliter textis, amphigastriis apice reflexis a *Mastigobryo tridente* GOTTSCHE et LDBG., cui proximum est, differt.

TABULA VII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars plantae a dorso, decies aucta; f.* 3. *pars plantae a ventre visa, decies aucta; f.* 4. *folium singulum, quadragies auctum; f.* 5. *textura folii, centies aucta; f.* 6. *amphigastrium, quinquagies auctum.*

b. Amphigastria crenato-denticulata.

109. MASTIGOBRYUM PRAERUPTUM N. ab E. *Syn. Hep.* p. 224. Caule horizontali dichotomo; foliis dense imbricatis praerupte deflexis oblique ovatis subfalcatis subulato-tridentatis, dentibusque integerrimis; amphigastriis imbricatis cordato-orbiculatis, basi lobo brevi utrinque cauli adnato semiperfoliatis integerrimis retusis crenulato-denticulatisque; perianthiis cylindrico-oblongis, apice plicatis, ore inciso-dentatis, laciniis conniventibus. *Spec. Hep.* p. 58. t. 10.

β. *obliquatum;* flagellis brevioribus; foliis oblique truncato- 3-dentatis, dente anteriore recto. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

110. MASTIGOBRYUM LINGUAEFORME v. D. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Archief.* IV. p. 95. DOZY *Plagiochila Sandei.* p. 8. Caule adscendente dichotomo; foliis imbricatis deflexis ovatis, margine ventrali arcuatis, basi dilatatis, apice tridentatis, dentibus parvis spinaeformibus integerrimis; amphigastriis dense imbricatis ovato-linguaeformibus, medio convexis, margine recurvis, apice planis dentatisque; fructu . . .

Habitat Javam. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

Olivaceum, adscendens, 0,04 longum. Rami dichotomi, apice curvati. Flagella crebra, breviora, crassiuscula, foliolis patulis, ovatis, convexis, apice bidenticulatis vestita. Folia imbricata, deflexa, ovata et oblongo-ovata, convexa; margo dorsalis rotundatus; ventralis arcuatus, subinflexus, basi valde dilatatus; apex obtusus, rotundatus, integerrimus vel tridentatus, dentibus spinaeformibus, integerrimis. Textura foliorum e cellulis parvis, ovali-rotundis, subcontiguis. Amphigastria foliis duplo minora, caule duplo latiora, imbricata, ovato-linguaeformia, medio gibboso-convexa, marginibus reflexis, subintegerrimis; basis integra vel dentibus longiusculis instructa; apex planus, inaequaliter denticulatus.

Affinia sunt *Mastigobryum cordistipulum* Ldbg., *Mastigobryum arcuatum* G. et L. atque e Javanicis *Mastigobryum praeruptum* N. ab E. et *Mastigobryum Zollingeri* L. et G., sed a cunctis recidit amphigastriis.

TABULA VIII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso visa, vicies aucta; f.* 3. *ramus a ventre visus, decies auctus; f.* 4. *folium singulum a ventre, quadragies auctum; f.* 5. *textura folii, centies aucta; f.* 6. *amphigastrium, quadragies auctum.*

111. MASTIGOBRYUM JAVANICUM v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 418. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 8. Caule gracili procumbente ramoso; flagellis longis capillaribus; foliis disticho-patentibus adproximatis ovatis planiusculis, margine ventrali basi rectis, apice angustatis, oblique truncato- 3-dentatis, dentibusque acutis integerrimis; amphigastriis distantibus parvis patulis planis rotundo- vel subquadrato-ovatis integerrimis retusove crenulatis; foliis involucralibus ovatis obtusis, apice denticulatis; perianthio...
Habitat Javam. Herb. Jungh. Herb. v. d. Bosch.

Pallide fuscum, gracile, procumbens, 0,03—0,05 longum, parce dichotomum. Flagella capillaria, 0,02 longa, simplicia vel ramosa, foliolis dissitis, minutis, ovatis vestita. Folia explanata, planiuscula, adproximata et subdistantia, ovata, subobliqua; margo dorsalis rotundatus; ventralis rectiusculus nec basi subito dilatatus: apex oblique truncatus, dentibus 3 acutis integerrimis. Amphigastria foliis fere triplo minora, distantia, plana, patula, caule paullo latiora, rotundato-ovata, vix longiora quam lata, integra vel apice repando-crenulata. Textura foliorum et amphigastriorum eadem: cellulae aequales, majusculae, ovali-rotundae, subcontiguae. Flores feminei adproximati. Folia involucralia ovata, obtusiuscula; exteriora minora, subintegerrima; interiora apice minute denticulata.

Differt a *Mastigobryo praerupto* N. ab E. statura gracili, foliis adplanatis, amphigastriis minoribus; a *Mastigobryo serpentino* N. ab E. foliis non falcatis, amphigastriis planis; ab utroque foliis subdistantibus. Proximum *Mastigobryo scutigero* Ldbg.; recedit vero nostra planta foliis basi aequalibus, amphigastriis subrotundis.

TABULA VIII.

Fig. 1. *Plantae magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso visa, vicies aucta; f.* 3. *ramus a ventre visus, decies auctus; f.* 4. *folium singulum, vicies et quinquies auctum; f.* 5. *textura folii, centies aucta; f.* 6. *amphigastrium, septuagies et quinquies auctum; f.* 7. *folium involucrale, tricies auctum; f.* 8. *pistillidium, centies auctum.*

112. MASTIGOBRYUM TRIDENS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 227. n. 38. Var. α. Caule procumbente subflexuoso dichotomo; foliis imbricatis ovato-oblongis, basi convexis, apice explanatis truncato-tridentatis, dentibusque integerrimis; amphigastriis approximatis quadratis truncatis subintegerrimis; fructu in caule principali et in flagellis obvio; perianthiis conicis ventricosis plicatis, ore denticulatis. *Spec. Hep.* p. 81. t. 14.

Habitat Javam. Syn. Hep. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

113. MASTIGOBRYUM INTERMEDIUM Gottsche et Ldbg. *Spec. Hep.* p. 82. t. 22. Caule procumbente dichotomo-ramoso; ramis divaricatis; foliis imbricatis ovato-oblongis distichis, margine dorsali arcuatis, ventrali descendenti sinuatis, apice tridentatis, dentibus acutis eroso-denticulatis; amphigastriis contiguis ovato-quadratis, apice crenulato-denticulatis vel subintegerrimis; perianthiis pyramidalibus incurvis, apice triplicato, ore ciliato. *Spec. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Spec. Hep. Herb. Jungh. Buitenzorg. Herb. Miq. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Herb. v. d. Bosch.

114. MASTIGOBRYUM PECTINATUM Ldbg. et G. *Spec. Hep.* p. 84. t. 14. *Mastigobryum tridens* Var. β. *Syn. Hep.* p. 227. Caule procumbente ramoso vel dichotomo ramoso; ramis divaricatis; foliis basi subimbricatis distichis linearibus oblongis angustis, margine dorsali subrectis, apice plerumque oblique truncatis 3- vel 2-dentatis, dentibus integerrimis subdivergentibus; amphigastriis parvis remotis semicircularibus vel subquadratis, apice interdum crenato; fructu . . . *Spec. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

115. MASTIGOBRYUM REINWARDTI v. d. Sd. Lc. in de Vriese *Plant. Ind. Bat. Reinwardtian.* p. 22. Caule procumbente dichotomo-ramoso; ramis divaricatis; foliis imbricatis ovato-lanceolatis subfalcatisque, apice tridentatis, dentibus acutis integerrimis; amphigastriis adproximatis vel contiguis planis ovato-quadratis, marginibus apiceque repando-crenatis; fructu . . . l. c.

Habitat in monte Klabat insulae Celebes, inter *Hypnum spiniforme*. Herb. Reinwardt.

Caulis viridi-lutescens, procumbens, 0,02 circiter longus. cum foliis 0,003 latus, dichotomus, ramis divaricatis, obtusis. Flagella crebra, tenuia, foliolis distantibus, patulis obsessa. Folia imbricata, basi convexiuscula, ovato-lanceolata, subfalcata; margo dorsalis rotundatus; ventralis parum arcuatus, versus basin latescens; apex subobliquc truncatus, tridentatus, dentibus acutis, integerrimis, medio aliquando majori. Amphigastria adproximata vel contigua, caulis latitudinem aequantia vel eo latiora, plana vel apice vix patula, ovato-subquadrata, marginibus et apice repando-crenata. Textura foliorum e cellulis parvis, sexangulari-ovalibus constat, limitibus subcontiguis, intercalaribus distinctis. Cellulae versus marginem folii dorsalem reliquis minores.

Proxima sunt *Mastigobryum tridens* N. ab E. et *Mastigobryum serpentinum* N. ab E. A priori differt foliis falcatis, amphigastriis margine toto repande crenatis. A posteriori colore diluto, caule magis ramoso, foliis minus falcatis et amphigastriis.

Dico Viro Clar. Reinwardt, qui cum Clar. Nees ab Esenbeck et Blume fundamenta posuit notionis Hepaticarum Javanicarum.

116. MASTIGOBRYUM ZOLLINGERI Lindbg. in Meissn. *Bot. Zeitung.* VI. 1848. p. 462. Caule procumbente dichotome ramoso; ramis divaricatis; foliis statu sicco circum caulem fere convolutis, statu madido arcte imbricatis ovato-ellipticis subfalcatis, basi utrinque dilatatis integerrimis, apice truncato-emarginatis vel obsolete tridentatis, vel rarius integris; amphigastriis dissitiusculis minutis transversalibus rotundo-quadratis, apice anguste subreflexis obsolete crenulatis, cum foliorum basi subconfluentibus; fructu in caule principali in ramis atque in flagellis obvio; perianthiis ovato-triquetris plicatis curvatis, ore contracto ciliatis. *Spec. Hep.* p. 90.

Habitat Javam. Zollinger. coll. n°. 815. z. Ad montem Salak (in Herb. v. d. Bosch) et coll. n°. 541. Ad rupes fl. Tjidurian prope Tjikoya in planitie (Zollinger Systemat. Verzeichn. I. p. 19).

117. MASTIGOBRYUM COMMUTATUM Ldbg. et G. *Spec. Hep.* p. 97. t. 22. Caule subdichotomo inordinate multiramoso; ramis incurvis; foliis arcte imbricatis oblique obovato-cordatis devexis, margine dorsali subfalcato, ventrali sinuato, in basin ampliatam convexiusculam descendente, apice angustato inaequali bi-tri-quadridenticulato; amphigastriis imbricatis ovatis, ob marginem subreflexum concavis, apice repando-denticulatis; fructu . . . *Spec. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Spec. Hep.

118. MASTIGOBRYUM EROSUM N. ab E. *Syn. Hep.* p. 229. Caule horizontali dichotomo; ramis divaricatis, apice dilatatis; foliis dense imbricatis,

basi convexis ovato-falcatis, ad apicem serrulatis, apice ipso praemorso-tridentatis; amphigastriis subimbricatis semicircularibus repando-crenatis; perianthiis... *Spec. Hep.* p. 99. t. 16.

α. Foliis ad apicem serrulatis, apice argute duplicato-dentatis; amphigastriis majoribus appressis. l. c.

β. Foliis margine subintegerrimis, apice praemorso-tridentatis, dentibus minute rariusque denticulatis; amphigastriis minoribus approximatis, apice patulis. l. c.

γ. Foliis longioribus angustis magis falcatis, margine integerrimis, dentibus obsolete denticulatis; amphigastriis minoribus subdistantibus, apice patulo-reflexis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. α. Herb. JUNGH. Buitenzorg. Herb. MIQ. Herb. Dz. et MB. Herb. v. D. BOSCH. Herb. BUSE. Var. β. Herb. Dz. et MB.

118. MASTIGOBRYUM INDICUM LDBG. et G. *Syn. Hep.* p. 230. Caule procumbente subsimplice flexuoso; foliis imbricatis cordato-ovatis, margine ventrali incurviusculis, basi dilatatis rotundatis crenulatis, apice acutis integris emarginato- 2-3-dentatisve, dentibusque serrulatis; amphigastriis approximatis transverse rotundis patulo-reflexis subrepandis; perianthiis.... *Spec. Hep.* p. 102. t. 19

Habitat Javam. Herb. JUNGH. — Specimina paucula.

119. MASTIGOBRYUM GIBBUM v. D. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Archief.* IV. p. 94. DOZY *Plagiochila Sandei.* p. 8. Caule adscendente flexuoso dichotomo; foliis imbricatis patentibus deflexis ovatis integerrimis, apice tridentatis, dentibus acutis integerrimis; amphigastriis adproximatis parvis quadratis, medio convexis, marginibus apiceque reflexo crenulato-dentatis; fructu . . .

Habitat Javam. Herb. JUNGH.

Caulis luteo-fuscescens, adsendens, flexuosus, 0,02—0,025 longus, cum foliis 0,0025 latus, iterato-dichotomus. Rami patenti-divaricati, apicibus curvatis. Flagella simplicia vel ramosa, subradicantia, foliolis dissitiusculis, parvis, ovatis vestita. Folia imbricata, convexa (sicca ob marginem utrumque contractum teretiuscula), deflexa, ovata et ovato-lanceolata; margo dorsalis rotundatus, basi ovatus; ventralis versus basin sensim vel subito latior, planus vel sinulo excavatus; apex rotundatus, 3-vel 2-dentatus, dentibus brevibus, acutis, integerrimis. Amphigastria adproximata, caule paulo latiora, quadrata, patula, toto ambitu crenulato-dentata, medio gibba, marginibus recurviusculis, apice patentissimo. Textura foliorum et amphigastriorum e cellulis minutis, ovali-rotundis, subcontiguis.

Differt a *Mastigobryo serpentino* N. ab E., cui vicinum est, colore dilutiori, caule magis

ramoso, foliis non falcatis et amphigastriis quadratis, circumcirca crenulato-dentatis. *Mastigobryum Reinwardti* recedit foliis falcatis et amphigastriis planis.

TABULA IX.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis cum foliis a dorso, decies et quinquies aucta; f.* 3. *ramus dichotomus cum flagellis a ventre, decies auctus; f.* 4. *folium singulum, tricies auctum; f.* 5. *textura folii, centies aucta; f.* 6. *amphigastrium, tricies auctum.*

120. MASTIGOBRYUM SERPENTINUM N. ab E. *Syn. Hep.* p. 233. Caule angusto adscendente flexuoso subsimplice vel apice dichotomo-prolifero; foliis imbricatis valde deflexis ovato-falcatis, apice angustis obliquis tridentatis bidentatisve, dentibusque integerrimis; amphigastriis parvis semiorbiculatis convexis patenti-reflexis, margine integerrimis, apice subcrenatis; perianthiis... *Spec. Hep.* p. 111. t. 19.

Habitat Javam. Syn. Hep. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Herb. Jungh.

Folia involucralia ovata, adpressa; exteriora obtusissima, subintegerrima; interiora acuta, apice profunde dentata. Perianthium rectum, cylindricum, apice attenuatum, 3-plicatum, hinc fissum, ore inciso-dentato.

121. MASTIGOBRYUM UNCIGERUM N. ab E. *Syn. Hep.* p. 233. Caule adscendente dichotomo; foliis basi imbricatis oblique deflexis, e basi latiore conico-linearibus subfalcatis, apice inaequaliter acute tridentatis bidentatisve, dentibusque integerrimis; amphigastriis subimbricatis ovato-quadratis inciso-serratis, serraturis uncinato-incurvis; foliis involucralibus inciso- multifidis; perianthiis ovatis plicatis, ore ciliatis. *Spec. Hep.* p. 112. t. 19.

β. Caule angustiore dichotomo-divaricato; foliis saepe magis explanatis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. α. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Buitenzorg. Herb. Miq. Var. β. Herb. Dz. et Mb. Herb. v. d. Bosch.

122. MASTIGOBRYUM PARADOXUM v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 419. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 8. Caule dichotomo-ramoso innovante; flagellis brevioribus crebris; foliis imbricatis deflexis semiovato-conicis, margine repandis, apice truncato- 3-dentatis, dentibusque acutis subdenticulatis; amphigastriis imbricatis adpressis, caule multo latioribus, e basi cordata quadrato-ovatis, basi incisis vel multifidis, laciniis curvatis, margine apiceque truncato inciso-dentatis, laciniis dentibusque denticulatis.

Habitat Javam. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

Planta olivaceo-fusca, rigidula, adscendens, 0,05 longa, cum foliis 0,005 lata, dichotomo-ramosa. Rami subdivaricati, quandoque apice innovantes. Flagella crebra, breviora, foliolis distantibus, patulis, minutis, ovatis, apice bidenticulatis, instructa. Folia imbricata, planiuscula, patenti-divergentia, arcuata, subdeflexa, semiovata et semiovato-conica; marginibus repando-crenulata; margo dorsalis rotundatus, basi convexiusculus; ventralis rectior, versus basin dilatatus; apex truncatus, 3-dentatus, dentibus longis, acutis, subdenticulatis. Amphigastria dense imbricata, adpressa, plana aut medio leniter convexa, caule duplo latiora, quadrato-ovata, basi biloba, lobis incisis, laciniis lanceolatis subdenticulatisque curvatis, margine reliquo et apice varie incisis dentatisque, laciniis iterum denticulatis; ramorum tenuiorum amphigastria margine apiceque simpliciter serrato-dentata; innovationum ovata, dissitiuscula, versus apicem solummodo denticulata. Textura foliorum e cellulis parvis, ovalibus; amphigastriorum minutissimis. Folia involucralia ovato-lanceolata, margine inciso-ciliata, ciliis apicalibus longissimis.

Colore obscuro, statura robustiori, foliis latioribus eorumque dentibus denticulatis, amphigastriis magnis densissimisque et foliorum involucralium forma a *Mastigobryo uncigero* N. ab E., quod proximum est et a *Mastigobryo trilobato* N. ab E. quoque, abunde differt.

TABULA IX.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *caulis pars a dorso, septies aucta; f.* 3. *rami pars cum innovatione a ventre, septies aucta; f.* 4. *folium singulum, decies et quinquies auctum; f.* 5. *textura folii, quinquagies aucta; f.* 6. *amphigastrium caulinum, vicies auctum; f.* 7. *amphigastrium rami tenuioris, decies et quinquies auctum; f.* 8. *flos femineus, decies et quinquies auctus; f.* 9. *folium involucrale internum, tricies auctum.*

XII. MICROPTERYGIUM LDBG., N. AB E. ET G.

123. MICROPTERYGIUM VULGARE N. ab E., L. et G. *Syn. Hep.* p. 234. Foliis crenato-serrulatis; amphigastriis rotundo-ovatis integerrimis crenulatisve, apice emarginato- 3-4-dentatis. *Spec. Hep.* p. 114. t. 21.

β. Foliis elongatis acuminatis toto ambitu laminaque ovata crenulato-denticulatis; amphigastriis subrotundis, margine subcrenulatis. l. c.

Habitat Javam (Var. β.). Herb. v. D. Bosch.

Statura minori, colore subfusco, specimina haec Javanica a Surinamensibus recedunt.

XIII. PHYSIOTIUM N. AB E.

124. PHYSIOTIUM SPHAGNOIDES N. ab. E. *Hep. Eur.* III. p. 85. Foliorum lobo dorsali ovato attenuato, apice integro, marginibus incurvis undulatis, auricula lanceolato-subulata. *Syn. Hep.* p. 235.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

SUBTRIBUS 5.

PTILIDIEAE N. AB E.

XIV. TRICHOCOLEA DUMORT.

125. TRICHOCOLEA TOMENTELLA N. ab E. *Hep. Eur.* III. p. 105. Caule furcato bi-tripinnatim ramoso; foliis bipartitis, laciniis bipartitis capillari-multifidis, ventrali minore, antrorsum inclinata; amphigastriis subquadrato-transversalibus profunde quadripartitis setaceo-multifidis. *Syn. Hep.* p. 237.

β (γ). *javanica;* caule laxo irregulariter bi-tripinnato; ramis terminalibus divaricatis. l. c.

γ (δ). *Pluma;* caule irregulariter bipinnato valido, pinnis dense pinnatis oblongis acuminatis. l. c.

δ (ε). *subsimplex;* caule tenero, laxe et dissite subpinnato; foliis laxe dispositis dissitis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM., HOLLE in Herb. Dz. et MB.

XV. SENDTNERA ENDL.

Sect. I. SCHISMA DUMORT.

Fructus in ramo elongato terminalis. Involucri folia interiora perianthio sexangulari basi et secum connata.

126. SENDTNERA JUNIPERINA N. ab E. *Hep. Eur.* III. p. 575. Foliis amphigastriisque oblongis, illis ultra medium, his ad medium fere bifidis, sinu obtuso, laciniis lanceolatis acuminatis rectis subdivergentibus. *Syn. Hep.* p. 239.

β. foliis amphigastriisque secundis. l. c.

Habitat Javam (β). Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

127. SENDTNERA DICRANA TAYLOR *in Schedis. Syn. Hep.* p. 239. Caule flexuoso filiformi fasciculatim ramoso; foliis oblongis, basi convoluto-imbricatis, ultra medium bifidis, laciniis erecto-patentibus vel patulo-reflexis nervosis, sinu lato divergentibus integerrimis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Herb. JUNGH.

128. SENDTNERA OCHROLEUCA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 240. Foliis amphigastriisque tri-quinquefidis, basi ciliatis, laciniis amphigastriorum canaliculatis; perianthio campanulato (ad speciem ramentaceo-hirsuto). *Syn. Hep.* l. c.

β. *tenerior;* ramis plerisque obtusis. l. c.

γ. nana; subsimplex tenera, ramis attenuatis repens; foliis amphigastriisque trifidis. l. c.

δ. viridis; amphigastriis planis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

Sect. 2. MASTIGOPHORA.

Fructus in ramulis brevibus laterales. Involucri folia libera. Perianthium basi ventricosum triangulare, profunde quadrifidum, laciniis involucrum subaequantibus angustis bifidis.

129. SENDTNERA DICLADOS ENDL. *Syn. Hep.* p. 241. Caule erecto, apice diviso, pinnatim ramoso; ramulis dichotomis attenuatis; foliis arcte imbricatis profunde trifidis, basi calcare instructis, dorso incumbente, laciniis lanceolatis acutis subintegerrimis; amphigastriis profunde bifidis, laciniis angustis, margine revolutis; involucris clavatis. *Syn. Hep.* l. c.

α. scorpioides; caule elongato, apice parcius fisso; ramis saepe heteromallis; foliis profunde trifidis, calcare dorsali minuto subulato laciniisque lanceolatis integerrimis; involucris majoribus solitariis. l. c.

α. major;* colore fusco; amphigastriis basi nudis. l. c.

*α**. tenerior;* foliis ferrugineis plerisque bifidis distincte papillosis; amphigastriis basi calcaratis. l. c.

β. calcarata; caule apice fastigiatim subdiviso ramulisque supremis plurimis apice obtusis; foliis ferrugineis tripartitis, calcare baseos uncinato subdentato, laciniis oblongis, basi et apice attenuatis, margine subrepandis; amphigastriis bipartitis, basi utrinque calcaratis; involucris minoribus subgeminatis. l. c.

Formae sunt:

β. conferta;* minor; ramulis omnibus brevibus valde adproximatis parum attenuatis obtusisve. l. c.

*β**. rhizobola;* subsimpliciter pinnata; ramis omnibus attenuatis plurimisque radicantibus. l. c.

*β***. nana;* vix semipollicaris, repens; omnibus ramis (per se quidem brevibus) longo processu solum penetrantibus; foliis bifidis, calcare tamen distincto. l. c.

Habitat Javam, Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

130. SENDTNERA FISSA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 243. Caule subramoso,

ramisque attenuatis serpentinis; foliis amphigastriisque dissitiusculis patulis ovatis, ad medium usque bifidis integerrimis, laciniis acuminatis; fructu.... *Syn. Hep.* l. c.

β. tenuis et laxior. l. c.

Habitat (β.) Javam. Syn. Hep.

XVI. PTILIDIUM N. ab E.

151. PTILIDIUM SCIUREUM N. ab E. *Syn. Hep.* p. 251. Foliis complicato-bilobis, lobo superiori deltoideo acuto, inferiori majori quadrifido-laciniato, laciniis truncatis longissime ciliatis; amphigastriis imbricatis ovatis pinnatifido-laciniatis ciliatis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

SUBTRIBUS 6.

PLATYPHYLLAE N. ab E.

XVII. RADULA N. ab E.

152. RADULA JAVANICA Gottsche. *Syn. Hep.* p. 257. Caule procumbente pinnatim decomposito rigido; foliis alternatim adproximatis subimbricatis suborbiculatis obtusis integerrimis, basi decurrenti-complicatis, lobulo magno plano rotundo-ovato vel quadrato, superne supra caulem protracto (in ramulis minore caulem non tegente subinflato) acutiusculo; fructu ramulo laterali brevi imposito; perianthio cyathiformi truncato laevi, ore compresso subrepando. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Herb. v. d. Bosch. Gadok, v. Hall. in Herb. Dz. et Mb.

153. RADULA MIQUELIANA Taylor. *Nov. Hep.* in *Lond. Journ. of Bot.* 1846. p. 377. Caule implexo procumbente debili pinnato; foliis laxius imbricatis patentibus oblongo-ovatis obtusis planiusculis, lobulo caulem amplexante, apice obtusiusculo patenti-recurvo; perianthio axillari lineari-oblongo, ore truncato. *Syn. Hep.* p. 728.

Habitat Javam. Syn. Hep. Buitenzorg. Herb. Miquel. Herb. Jungh. Herb. v. d. Bosch.

Perianthium basi utrinque obsolete convexo-uniplicatum, adeoque tetragonum. Capsula oblongo-ovalis.

154. RADULA CAMPANIGERA Montgne in *Lond. Journ. of Bot.* 1844.

p. 654. Caule prostrato elongato distiche subpinnatim ramoso; foliis ovato-orbiculatis, subtus ad basin complicatis, lobulo oblongo minore, angulis rotundatis; perianthio apice dilatato campaniformi. *Syn. Hep.* p. 729.

Habitat Javam. Syn. Hep. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Buitenzorg. Herb. MIQ.

Caulis validus, bipinnatus; pinnae laxae, elongatae, subdivergentes. Folia caulina dissitiuscula, ramorum laxe imbricata; margo dorsalis rotundatus, ventralis statu sicco subinflexus, ante lobulum sinuatus; lobulus vix decurrens, subquadratus, obtusus, folio adpressus, planus, basi saccatus; margo internus medium caulem non attingens, adnatus. Perianthia ad latera caulis in ramulo brevi, fere sessilia.

Radulae Javanicae GOTTSCHE magis, quam *Radulae lingulatae* GOTTSCHE affinis; cum neutra tamen confundi potest.

155. RADULA FORMOSA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 258. Caule prostrato ramoso; foliis subhorizontalibus imbricatis ovato-orbiculatis obtusis, apice inflexis integerrimis, basi emarginato-complicatis, lobulo inflexo truncato, extrorsum acuto plano (ramulis masculis cum foliis alternantibus brevissimis oblongis pronis spiciformibus); fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

β. ramulis nonnullis ultra folia progredientibus triplo majoribus, foliis simili minorum ratione imbricatis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. — Sumatram, in mont. Lubu Radja. Herb. JUNGH. Var. β. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

Stirps monoica. Fructus rarus, axillaris. Perianthium cyathiforme, 0,002 longum, laeve, compressum, ore truncato, subrepando. Seta 0,0015 longa. Capsula cinnamomea, valvulis lineari-oblongis.

156. RADULA CAVIFOLIA HAMPE. *Syn. Hep.* p. 259. Caule procumbente pinnatim composito flaccido; foliis verticalibus adproximatis rotundis valde convexis, margine ventrali toto in lobulum involutis angustiorem, vel in folium transeuntem, vel apice acute excisum; fructu . . . *Syn. Hep.* p. 259.

Habitat Javam. Syn. Hep. Repens in *Lejeunia xanthocarpa* L. et LDBG. Herb. JUNGH. In *Plagiochila abietina* N. ab E. et *Frullania Hutchinsiae* N. ab E. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

Fructus axillaris. Perianthium cochleariforme, scilicet a basi ad medium usque lineari-cylindricum, dein subito dilatatum, compressum, laeve, ore truncato. Capsula vix emergens, ovali-globosa, purpurascens. Spica mascula subsessilis, oblonga, e 7 paribus foliorum composita. Folia perigonialia dense imbricata, semi-globosa, subcompressa, apice emarginato-biloba.

157. RADULA PROTENSA LINDBG. MEISSN. *Hep. Jav.* in *Bot. Zeitung.* 1848. p. 462. Caule repente flaccido pinnatim ramoso; foliis imbricatis ova-

tis obtusis integerrimis, margine ventrali basi decurrente in lobulum complicatis cauli adnatum, apice oblique in acumen longum oblongo-lanceolatum liberum excurrentem. LDBG. l. c.

Habitat in foliis ad littus Javae austro-orientalis. Prope Malang. ZOLLINGER, coll. n°. 577.

Lobuli folii forma ab omnibus diversa (LDBG.).

158. RADULA LINGULATA GOTTSCHE. *Syn. Hep.* p. 260. Caule repente rigidulo laxe ramoso; foliis anguste imbricatis oblongis obtusis integerrimis, margine ventrali rectiusculo, basi non decurrente, lobulatis; lobulo adpresso oblongo linguaeformi, margine interno a medio adnato, externo cauli parallelo, apice rotundo libero; fructu ... *Syn. Hep.* p. 260.

Habitat Javam. Syn. Hep. Buitenzorg. Herb. MIQ. Inter *Hypnum cymbifolium*. Herb. JUNGH.

159. RADULA ANCEPS v. D. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 419. DOZY *Plagiochila Sandei*. p. 8. Caule repente bipinnatim ramoso; foliis imbricatis oblique ovatis acutis, margine dorsali apiceque profunde dentatis, basi decurrente complicatis, lobulo quadrato, basi saccato, margine interno cauli adnato, apice obtuso inflexo; fructu axillari et laterali; perianthio....

Habitat Javam. Buitenzorg, repens in *Plagiochila blepharophora* N. ab E. Herb. MIQ. In *Plagiochila Bantamensi* N. ab E. et in Muscis. Herb. JUNGH. HOLLE in Herb. Dz. et MB.

Olivacea, repens, 0,02 longa. Caulis cum foliis 0,001 fere latus, simpliciter et 2-3-pinnatus, ramulis confertis. Folia subhorizontalia, imbricata, oblique ovata; margo dorsalis rotundatus, profunde et spinuloso-dentatus, ventralis rectior, subdecurrens, sub apice quandoque dentatus, ceterum integerrimus; apex acutus, vel, ob dentem apicalem longiorem, acuminatus; lobulus quadratus, obtusus, integerrimus, tumidus, vel basi sola saccatus; margine interno cauli adnatus, parte libera inflexa, ita ut lobulus triangulari-ovatus adpareat. Textura e cellulis parvis, inaequalibus, ovali-rotundis, quadratisque constat. Fructus terminalis, axillaris et lateralis. Folia involucralia biloba, exteriora longiora; lobus dorsalis apice subdeflexus, spinuloso-dentatus, ventralis oblongo-quadratus, adplanatus; interiora inaequaliter biloba, lobis subrotundatis. Pistillidia fusca, circiter triginta. Perianthium non visum. An hujus generis? A reliquis *Radulis* differt foliis dentatis.

TABULA X.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso, vicies aucta; f.* 3. *pars plantae a ventre, vicies aucta; f.* 4. *folium, quinquagies auctum; f.* 5. *textura folii, centies aucta; f.* 6. *folium involucrale externum, vicies auctum; f.* 7. *folium involucrale internum cum pistillidiis, quadragies auctum; f.* 8. *pistillidia, centies aucta.*

XVIII. MADOTHECA DUMORT.

140. MADOTHECA ACUTIFOLIA L. et Ldbg. in Lehm. *Pugill. pl.* VII. 1838. p. 8. Caule repente; ramis erectis bipinnatis; foliis subhorizontalibus oblique ovatis acuminatis apiculato-denticulatisve, apice recurvis, lobulo ligulato lanceolatove obtuso plano; amphigastriis oblongo-quadratis subadpressis, interdum apiculatis (maxime versus summitatem plantae); fructu in ramulis laterali; foliis involucralibus conformibus; perianthii (juvenilis tantum visi) ore laciniato-dentato. *Syn. Hep.* p. 266.

Habitat Javam. Herb. Jungh. Prope Gadok, altit. 1500′. Herb. Dz. et Mb., communicata a Cl. v. Hall.

SUBTRIBUS 7.

JUBULEAE N. ab E.

XIX. BRYOPTERIS LDBG.

141. BRYOPTERIS FILICINA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 284. Caule repente: ramis erectis pinnatim ramosis, ramulis strictis; foliis arcte imbricatis ovatis acutis serratis, subtus complicatis, lobulo rotundato integerrimo; amphigastriis foliis parum minoribus imbricatis subrectangulis truncatis, apice dentatis. *Syn. Hep.* l. c.

β. arguta; foliis margine dorsali et ventrali argutius serratis. l. c.

Habitat Javam (Var. β.). Syn. Hep.

142. BRYOPTERIS FRUTICOSA Ldbg. et G. *Syn. Hep.* p. 757. Caule repente; ramis erectis bipinnatim fasciculatis, ramulis patulis; foliis imbricatis ovatis acutis, apice inaequaliter subserratis, subtus complicatis; lobulo oblongo-quadrato integerrimo, apice plano acuto; amphigastriis patulis ovalibus, margine reflexis, apice serrato-dentatis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

XX. THYSANANTHUS LDBG.

143. THYSANANTHUS PLANUS v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 419. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 9. Caule repente; ramis dichotomis erectiusculis fastigiatis pinnatisve; foliis subhorizontalibus disticho-planis ovatis acutis vel obtusis integerrimis apiceve serratis, medio cellulis longioribus

vittatis, lobulo planiusculo; amphigastriis subimbricatis rotundo-quadratis vel obovatis retusis adpressis patulisve integerrimis, fructu in dichotomia et terminali; foliis involucralibus acutis, apice serratis, amphigastrio involucrali magno ovato profunde bifido, laciniis acutis utrinque serratis; perianthio triquetro, angulis denticulatis.

Habitat Javam. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et M. Herb. v. D. BOSCH. Buitenzorg. Herb. MIQ. Ad montem Salak. ZOLLINGER. coll. sub n°. 3560.

Fuscus, repens, 0,015—0,025 longus. Rami adscendentes vel erectiusculi, simplices, pinnato- vel dichotomo-ramosi, cum foliis 0,002 lati; ramuli patentes vel divergentes. Folia subhorizontalia, patenti divergentia, imbricata, subplana, ovata, nonnulla obtusa, vulgo acuta, acuminata vel cuspidulata, integerrima vel versus apicem, praesertim in ramis fructiferis, serrulata; lobulus plicaeformis vel ovatus, aut oblongus, in folium transiens, aut subtruncatus. Amphigastria apice patula, subimbricata, quadrato-subrotunda vel obovata, integerrima, medio carinato-convexa, retusa. Textura foliorum e cellulis minutis, subrotundis, sub medio folio majoribus, oblongis, vittam longitudinalem mentientibus; amphigastriorum textura aequalis, densa. Fructus in dichotomia et terminalis vel etiam lateralis. Folia involucralia caulinis subaequalia, ovata, acuta, versus apicem serrata; margine ventrali anguste plicata, plica lineari in marginem transeunte vel apice truncata, acuta. Amphigastrium involucrale caulinis duplo triplove majus, ovatum, dorso medio convexo-complicatum, ad medium usque bifidum, laciniis acuminatis, utrinque serratis. Perianthium oblongo-triquetrum, marginibus deflexis, ventre late uni-carinatum, marginibus carinaque apice denticulatis. Spicae masculae plures in eodem ramo, interrupte foliosae. Folia perigonialia reliquis paullo densius imbricata et minora, biloba; lobus ventralis oblongus, tumidus, truncatus, acutus vel cuspidatus, subtilissime serrulatus. Amphigastria caulinis similia.

Differt a *Thysananthо spathulistipo* LDBG, foliis magis planis, subintegerrimis, vitta magis minusve distincta notatis et amphigastriis caulinis subrotundis, integerrimis.

TABULA X.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars rami a dorso visa, decies et quinquies aucta; f.* 3. *pars rami a ventre, decies aucta; f.* 4. *folium, tricies auctum; f.* 5. *textura folii, septuagies et quinquies aucta; f.* 6. *amphigastrium caulinum, quinquagies auctum; f.* 7. *perianthium cum amphigastrio et foliis involucralibus, vicies et quinquies aucta; f.* 8. *perianthium a dorso, vicies et quinquies auctum; f.* 9. *spica mascula, decies et quinquies aucta; f.* 10. *folium perigoniale, tricies auctum.*

144. THYSANANTHUS SPATHULISTIPUS LINDBG. *Syn. Hep.* p. 287. Caule dichotomo-fastigiato pinnatove; foliis subverticalibus ovatis acutis, margine infero complicato-involutis, apice explanatis eroso-serratis; amphigastriis spa-

thulatis truncatis, apice denticulatis planiusculis; perianthii angulis spinuloso-dentatis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Herb. v. d. Bosch.

145. THYSANANTHUS CONVOLUTUS Lindbg. *Syn. Hep.* p. 288. Caule subfastigiato; foliis verticalibus oblique rotundis concavis, margine supero apiceque inflexis integerrimis apiculatisve, infero plicato-involutis, sub apice planis denticulatis; amphigastriis spathulatis truncatis serratis, margine revolutis; perianthiis margine carinaque subdenticulatis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Buitenzorg, Herb. Miq.

XXI. PTYCHANTHUS N. ab E.

146. PTYCHANTHUS INTERMEDIUS Gottsche. *Muscor. Hep. Spec. Nov. Javan.* in *Natuurk. Tijdschr. voor Nederl. Indië.* 2 Serie. I. 1855. p. 576. Zollinger *System. Verzeichn.* I. p. 19 et. p. 20. Caule procumbente bi- (rarius tri-) pinnato, ramis elongatis horizontalibus iterum pinnatis; foliis subimbricatis, patenti-divergentibus (in vetustis apicibus interdum sursum flexis) ovali-obovatis, apice oblique acuto denticulatis, margine ventrali inflexo, lobulo basali parvo inflexo vel complicato sublibero, extrorsum emarginato-unidentato, vel in novellis fere nullo; amphigastriis contiguis ovali-subquadratis erecto-patentibus, apice rotundato emarginato truncatove denticulatis; perianthiis cylindricis, apice et basi angustatis, 10—11 plicatis. Gottsche. l. c.

Habitat Javam. In monte Salak. Zollinger, coll. n°. 3560. c. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Buitenzorg. Herb. Miq. Herb. v. d. Bosch. Prope Gadok; communicavit Cl. v. Hall. Herb. Dz. et Mb.

Inter *Ptychanthum Wightii* et *Javanicum* intermedius, tamen *Pt. Wightii* propior et forsan ejus varietas. (Gottsche).

147. PTYCHANTHUS JAVANICUS Gottsche. *Syn. Hep.* p. 291. Caule erecto striato subpinnato; foliis imbricatis patenti-divergentibus obovatis acuminatis acutisque, apice serrato-dentatis, margine infero anguste subinflexis, lobulo basali parvo inflexo; amphigastriis imbricatis quadratis, margine subreflexis, apice truncato-excisis inaequaliter dentato-serratis; perianthiis obovatis, margine latiore compressis, anguste carinatis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

148. PTYCHANTHUS SULCATUS N. ab E. *Hep. Eur.* III. p. 215. Caule procumbente dichotomo, ramis subfastigiatis; foliis semiverticalibus imbricatis oblongo-ovatis apiculatis integerrimis, basi subtus complicatis, lobulo rotundato; amphigastriis subimbricatis folio minoribus reniformi-rotundatis subintegerrimis; fructibus secundis in amphigastriorum angulis originem ducentibus ad dichotomiam et in ramulorum extremorum apice adproximatis; perianthiis cylindricis sulcato-striatis. *Syn. Hep.* p. 291.

α. amphigastriis minoribus, apice retusis. l. c.

β. amphigastriis majoribus rotundatis (neque vero folia adaequantibus). l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. MIQ. (Buitenzorg.). et Herb. v. D. BOSCH. Frustula tantum adsunt.

149. PTYCHANTHUS RETUSUS N. ab E. *Hep. Eur.* III. p. 212. Caule repente; ramis dichotomis erectiusculis rariusve pinnatis procumbentibus; foliis subhorizontalibus disticho-planis oblique ovatis acutis integerrimis, lobulo adplanato minimo vel plicaeformi; amphigastriis subimbricatis orbiculato-quadratis retusis; fructibus e dichotomia adproximatis; perianthiis plicatis. *Syn. Hep.* p. 292.

α. caule subfasciculatim ramoso; ramis inordinate pinnatis procumbentibus; foliis vetustioribus obtusis; amphigastriis imbricatis fere orbiculatis retusis patulis. Sterilis. l. c.

β. caule ramisque dichotomis subfastigiatis, his adscendentibus; amphigastriis subimbricatis vel tantum adproximatis orbiculato-quadratis retusis minus patulis. Fructifera. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

Species ista, qualem descripsit Clar. auctor, in herbariis, quae vidi, desideratur. Plantam rariorem vocat.

XXII. PHRAGMICOMA DUMORT.

§. 1. *Ptychanthoides.* Perianthium a latere compressum, carina dorsali una, binisque ventralibus instructum. Pedicellus capsulae internodiis (post exsiccationem) tuberosa-geniculatus.

150. PHRAMICOMA FERTILIS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 299. Caule repente subpinnatim ramoso; foliis verticalibus confertis patentibus oblique ovato-rotundis subsquarrosis integerrimis, margine infero basi complicatis, lobulo subplano rotundato crenulato; amphigastriis imbricatis orbiculato-quadra-

tis transversalibus planis integerrimis; fructu in ramulo brevi terminali; perianthio exserto obovato plicato, marginibus compressis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

151. PHRAGMICOMA HASKARLIANA GOTTSCHE. *Syn. Hep.* p. 299. Caule repente subsimpliciter pinnato; ramis inaequalibus erecto-patulis; foliis subverticalibus arcte imbricatis oblique ovato-rotundis squarrosis integerrimis undulatis, margine infero inflexis basique complicatis, lobulo convoluto, apice introrsum exstante plano bidentato; amphigastriis imbricatis obovato-quadratis, margine reflexis, apice emarginato-repandis; fructu in ramulis terminali; perianthio subexserto obovato compresso, dorso unicarinato, apice trifido. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

152. PHRAGMICOMA HUMILIS GOTTSCHE. *Syn. Hep.* p. 299. Caule repente vage subpinnatimve ramoso, basi subflagellifero; foliis verticalibus confertis patentibus oblique ovato-rotundis integerrimis, margine infero basi complicatis, lobulo subplano rotundato integerrimo, cum folio confluente; amphigastriis imbricatis transverse rotundo-cuneatis integerrimis subretusis patulis; perianthiis e dichotomia obovatis compressis, dorso sulcatis, ventre unicarinatis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM., HOLLE in Herb. Dz. et MB.

153. PHRAGMICOMA TUMIDA N. et M. *Syn. Hep.* p. 300. Caule pinnatim subramoso, ramulis brevibus; foliis verticalibus confertis suborbiculatis obtusissimis integerrimis, margine infero toto inflexis repandis, lobulo subindistincto; amphigastriis rotundo-reniformibus adproximatis, apice retusis breviter reflexis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Herb. MIQ. Herb. V. D. BOSCH.

Perianthium involucrum subsuperans, ovatum, apice quinque-plicatum, plicis obtusis.

154. PHRAGMICOMA ARCUATA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 300. Caule repente simpliciter sparsim pinnato, vel ramulis elongatis iterum divisis bipinnato; ramulis subdecurvis; foliis verticalibus patentibus ovatis obtusis et acutis, basi longe decurrente complicato-saccatis, lobulo in folium desinente inflato oblique truncato, apice introrsum subbidentato; amphigastriis imbricatis quadrato-oblongis planis integerrimis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

155. PHRAGMICOMA RENILOBA GOTTSCHE. *Syn. Hep.* p. 301. Caule subsimplici; foliis semiverticalibus, basi imbricatis, oblique ovatis acutis, mar-

gine angulatis, basi subtus complicatis, lobulo ovali convoluto integerrimo in folium desinente; amphigastriis adproximatis orbiculatis obcordatisque retusis, apice undulato-crenatis planis margineque reflexis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

§. 2. Species ad *Ptychanthum* et *Thysananthum* genus aberrantes. Fructus e dichotomia revera terminalis, ramificatione igitur centrifuga.

156. PHRAGMICOMA POLYMORPHA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 420. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 9. Caule repente; ramis dichotomis adscendentibus fastigiatis pinnatisve; foliis semiverticalibus imbricatis oblique ovatis obtusis acutisve, margine dorsali integerrimis planis, ventrali inflexis undulatis cum apice plano denticulatis, vel planis integerrimis, lobulo tumido subtruncato; amphigastriis subimbricatis rotundo-obovatis undulatis, apice truncato-denticulatis patenti-divergentibus vel subintegris retusis patulisve; fructibus e dichotomia lateralibus adproximatis et terminalibus; perianthio oblongo valde compresso laevi, dorso et ventre triplicato, plicis dorsalibus obsoletis.

Duae Formae potissimum sunt distinguendae:

α. undulifolia; foliis amphigastriisque undulatis dentatis; perianthiis adproximatis.

β. planifolia; foliis amphigastriisque non undulatis subdenticulatis integrisve; perianthiis dissitiusculis.

Habitat Javam. Form. *α.* Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Herb. v. d. Bosch. Form. *β.* Ad montem Salak. Zollinger, coll. sub n°. 3560 (pl. feminea). Herb. v. d. Bosch (pl. mascula).

Caulis repens, 0,03 fere longus, cum foliis 0,003 latus. Rami adscendentes, irregulariter ramosi, dichotomi vel pinnati. Folia Form. *α.* imbricata, semiverticalia, patentia, ovata; margo dorsalis rotundatus, planus, integerrimus; ventralis in medio vulgo dilatatus, inflexus, cripato-undulatus, repando-denticulatus; apex obtusus vel acutus, denticulatus; lobulus tumidus vel margine subplanus, apice subtruncatus. Amphigastria foliis triplo quadruplove minora, subimbricata vel contigua, patenti-reflexa vel patula, rotundo-obovata, versus apicem apiceque truncato ipso inaequaliter dentata. Textura foliorum e cellulis rotundis, versus basin laxioribus. Fructus in dichotomia, ad latus internum adproximati et terminales. Folia involucralia conformia; lobulus planus, acutus. Amphigastria involucralia caulinis longiora, oblongo-spathulata, apice denticulata, truncata, subemarginata vel emarginato-bidentata. Perianthium oblongum, compressum, marginibus tenuibus, dorso et ventre triplicatum, plicis ventralibus elevatis.

Folia Form. *β.* margine ventrali subintegerrima, reflexa, plana, apice subdenticulata vel integra. Amphigastria patula aut apice subreflexa, plana, minute denticulata, raro integerrima.

Perianthia magis in ramis dispersa, oblongo-obovata. Spicae masculae lineares, e paribus foliorum 6—12 compositae, ramum medium cingentes, solitariae vel plures in eodem ramo dispositae, foliis caulinis interruptae. Folia perigonialia caulinis minora densiusque imbricata, biloba; lobus ventralis inflatus, ovato-oblongus, truncatus, obtusus vel acutus. Amphigastria perigonialia patenti-reflexa.

Affinis *Phragmicomae semirepandae* N. ab E. Statura minore, mollitie, textura laxiori, amphigastriis minoribus laxiusque imbricatis et perianthio nostra planta discernitur.

A *Thysananthо plano*, cui Form. β. subsimilis est, praeter generis notas differt: foliis latioribus, laxius et aequaliter textis, amphigastriis magis minusve denticulatis.

TABULA XI.

Form. α. undulifolia. *Fig.* 1. *Plantae magnitudine naturali; f.* 2. *pars rami a dorso; f.* 3. *ramus fructifer a ventre, decies auctus; f.* 4. *folium, tricies auctum; f.* 5. *textura folii, centies aucta; f.* 6. *amphigastrium caulinum, vicies auctum; f.* 7. *perianthium a dorso; f.* 8. *perianthium a ventre cum amphigastrio involucrali, vicies aucta.*

Form. β. planifolia. *Fig.* 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso visa, decies aucta; f.* 3. *ramus cum perianthiis a ventre visus, decies auctus; f.* 4. *textura folii, centies aucta; f.* 5. *amphigastrium caulinum, octogies auctum; f.* 6. *folium involucrale, quadragies auctum; f.* 7. *amphigastrium involucrale, quadragies auctum; f.* 8. *perianthium a dorso visum, vicies auctum; f.* 9. *perianthium a ventre cum amphigastrio involucrali et fructu, vicies aucta; f.* 10. *spica mascula, decies et quinquies aucta.*

157. PHRAGMICOMA SEMIREPANDA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 302. Caule procumbente ramoso; ramis subfastigiatis subpinnulatis; foliis subhorizontalibus patentibus oblique ovatis acutiusculis, apice dentato-serratis, basi complicatis, margine postico repando undulato; amphigastriis dense imbricatis orbiculatis integerrimis; fructu in dichotomia et terminali; perianthiis oblongo-ovatis laevibus, carina ventrali triplicata (rarius biplicata), dorso concaviusculo unicarinato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Herb. v. D. BOSCH.

XXIII. OMPHALANTHUS LDBG. ET N. AB E.

158. OMPHALANTHUS UMBILICATUS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 305. Caule procumbente repente vage ramoso; foliis horizontalibus dense imbricatis cordato-orbiculatis integerrimis, basi subdecurrente minutissime complicatis; amphigastriis foliis minoribus distantibus vel contiguis orbiculatis bifidis; fructibus in ramulo proprio terminalibus saepe adgregatis; calycibus turbinato-obconicis laevibus truncatis umbilicatisque. *Syn. Hep.* l. c.

β. caule magis elongato; ramis raris brevibus; amphigastriis majoribus magis adproximatis, laciniis acutiusculis vel obtusis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. α. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. — Ternate. Herb. Reinwardt.

159. OMPHALANTHUS LUMBRICOIDES *Syn. Hep.* p. 748. Caule prostrato; foliis semiverticalibus dense imbricatis cauli circumvolutis orbiculatis obtusis integerrimis, basi sinu excisis complicatisque, lobulo parvo truncato introrsum rotundato; amphigastriis paulo minoribus subcontiguis cordato-ovatis ad medium usque bifidis, dentibus obtusiusculis, sinu angusto; fructu in ramulis lateralibus seriatim dispositis; perianthio sessili, in superiore parte tetragono, angulis crenulatis, ventre bicarinato, dorso concaviusculo, angulis lateralibus adscendentibus. *Syn. Hep.* p. 342. (Lejeunia.).

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Herb. v. d. Bosch. In monte Salak. Zollinger, coll. sub n°. 3360 (frustulum). Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

XXIV. LEJEUNIA GOTTSCHE et LDBG.

§. 1. Phragmicomoideae. Perianthium a tergo compressum, ventre convexo, dorso depresso vel concaviusculo laevi, ore bilabiato marginibusque ciliatis, cristatis alatisve. Integristipulae.

a. Perianthio cristis et ciliis ornato.

160. LEJEUNIA ADPLANATA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 314. Caule repente vage pinnatimque ramoso gracili; foliis subimbricatis ovato-oblongis obtusis acutisque, apice deflexis subintegerrimis, margine infero in lobulum complicatis subsaccatum, basi ventricosum subdenticulatum tectum; amphigastriis subimbricatis cordato-reniformibus folia fere aequantibus, margine subreflexis; fructu in ramulis brevibus terminali; foliis involucralibus ovatis serratis, margine infero in lobulum planum angustum acutum complicatis; perianthio rotundo-obovato, dorso subcarinato, ventre biplicato, marginibus angulisque superne cristato-incisis. *Syn. Hep.* l. c.

α. foliis plerisque acuminatis, ad apicem saepe denticulatis; involucralibus acutis argute serratis, lobulo longiore acutiusculo. l. c.

β. foliis obtusis integerrimis; lobulo foliorum involucralium saepe indistincto. l. c.

* foliis amphigastriisque subundulatis. l. c.

** nigricans; amphigastriis maximis folia fere aequantibus. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

161. LEJEUNIA SUBFUSCA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 315. Caule repente vage pinnatimque ramoso gracili; foliis adproximatis ovato-rotundis obtusis integerrimis, margine infero sinuato-complicatis, lobulo subsaccato, basi ventricoso subintegerrimo; amphigastriis parvis distantibus subrotundis planis; fructu in ramulis terminali; foliis involucralibus obovatis minute denticulato-serratis, margine infero in lobulum longiorem planum complicatis; perianthio obovato-pyriformi compresso, ventre bicarinato, marginibus angulisque superne cristato-incisis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Herb. Dz. et Mb.

162. LEJEUNIA NIGRICANS Ldbg. *Syn. Hep.* p. 316. Caule repente intricato pinnatim decomposito, ramis subfasciculatis; foliis imbricatis ovato-rotundis subplanis obtusis acuminatis apiculatisve integerrimis, basi complicatis, lobulo subsaccato inflato-ventricoso, in ramulorum foliis supremis maximo; amphigastriis parvis dissitis reniformi-rotundis; fructu in ramulo proprio brevi; foliis involucralibus obovatis obtusis acutisve serratis, basi in lobulum parvum saepe obsoletum complicatis; perianthio obovato compresso, ventre biplicato, marginibus angulisque cristato-incisis. *Syn. Hep.* l. c.

β. monstrosa; caule nano prolifero-cristato. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. *α.* Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Frustula.

163. LEJEUNIA INTERMEDIA Ldbg. *Syn. Hep.* p. 316. Caule repente vage pinnatimque ramoso gracili; foliis subimbricatis ovatis acuminatis integerrimis apiceve oblique truncato-subdenticulatis explanatis, in lobulum complicatis, basi inflatum; amphigastriis remotis rotundo-reniformibus adpressis, foliis minoribus; fructu in ramulis propriis terminali; foliis involucralibus ovatis subacuminatis denticulatis, margine infero in lobulum complicatis longiorem angustum acutum; perianthio . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

b. Perianthii margine et angulis asperrimis.

164. LEJEUNIA JAVANICA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 320. Caule repente vage pinnatimque ramoso; foliis subimbricatis ovato-orbiculatis obtusis integerrimis, margine infero recto, basi in plicam parvam truncatam integerrimam inflexis; amphigastriis parvis distantibus rotundo-reniformibus integerrimis; fructu in ramulis lateralibus terminali; foliis involucralibus integerrimis, lobo

minuto vel obsoleto; perianthio obovato, ventre bicarinato, marginibus carinisque tuberculatis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

c. Perianthio alato.

165. LEJEUNIA FLOCCOSA L. et Ldbg. *Syn. Hep.* p. 324. Caule repente adpresso parce ramoso; foliis imbricatis semiverticalibus subcordatis obtusis hyalinis, medio serie cellularum longiorum instructis, integerrimis, basi subtus complicatis, lobulo planiusculo, margine folio suo adnato, apice emarginato-unidentato; amphigastriis subnullis; fructu laterali sessili; foliis involucralibus conformibus perianthium subaequantibus; perianthio brevi lato-obcordato compresso laevi. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. In fronde *Hymenophylli*. Herb. Jungh.

§. 2. Typicae. Perianthium ambitu teretiusculo, ventre lateribus tergoque etiam carinatis, hinc varie angulatis.

A. Integristipulae.

† Perianthio subcristato.

166. LEJEUNIA RECURVISTIPULA Gottsche. *Syn. Hep.* p. 326. Caule repente subbipinnatim ramoso flaccido; ramis elongatis, apice incurvis; foliis imbricatis oblongo-ovatis, superioribus subfalcatis acutis obtusisve, margine dorsali subcrenatis, ad apicem apiceve ipso serrato-dentatis, ventrali integerrimis, lobulo ovato convoluto confluente integerrimo; amphigastriis rotundo-obovatis obcuneatisve truncato-retusis, inferioribus planis integerrimis vel apice obsolete crenato-dentatis, supremis maximis gibbo dorsali lacinula bifida cristatis margineque (praesertim ad apicem) undulato-reflexis dentato-spinosis; perianthiis terminalibus obovatis, margine compressis, dorso ventreque carinatis, angulis dentato-spinulosis; involucri foliis perianthium superantibus, apice patentibus serratis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Herb. Jungh.

† † Perianthio laevi.

167. LEJEUNIA XANTHOCARPA L. et Ldbg. *Syn. Hep.* p. 330. Caule repente ramoso; ramulis brevibus subfastigiatis; foliis arcte imbricatis subver-

ticalibus rotundis convexis integerrimis, margine ventrali toto apiceque inflexis, basi complicatis, lobulo majori apiculato minorique ventricoso-convolutis; amphigastriis rotundo-reniformibus contiguis integerrimis; perianthiis lateralibus obovatis, dorso uni-, ventre bicarinatis, angulis lateralibus ventrem versus devexis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Herb. Jungh. Buitenzorg. Herb. Miq. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

168. LEJEUNIA CONFERTA Meissn. *Syn. Hep.* p. 333. Caule repente pinnato, ramulis supremis elongatis, subfasciculato; foliis arcte imbricatis ovato-subrotundis integerrimis, basi sinuato-inflexis, plerisque in lobulum complicatis magnum, sinu discretum rotundatum, basi inflatum; amphigastriis adproximatis obovato-cuneatis reniformibusve integerrimis; perianthiis lateralibus rotundo-obovatis, margine compressis, ventre bicarinatis, dorso ad apicem carina angusta instructis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

169. LEJEUNIA LINDENBERGII Gottsche. *Syn. Hep.* p. 336. Caule repente subramoso, ramulis brevibus; foliis contiguis distichis ovatis obtusis decurvis, dorso ante plicam curvaturae margineque cellulis prominentibus asperulis, basi sinuato-complicatis, lobulo parvo inflato in folium transeunte; amphigastriis foliis minoribus contiguis reniformibus, apice subretuso-repandis, margine integerrimis subcrenulatisve; perianthiis lateralibus obovatis compressis, dorso uni-, ventre bicarinatis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Herb. Jungh. Herb. v. d. Bosch. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

B. Amphigastriis vel bifidis vel nullis.

a. *Perianthiis obcordatis depressis ciliatis denticulatisve.*

170. LEJEUNIA DOZYANA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 522. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 9. Caule repente subramoso; foliis imbricatis obovato-spathulatis parce denticulatis, lobulo convexo, apice truncato dentato; amphigastriis nullis; fructu in ramulo laterali; perianthio involucrum subaequante obovato compresso, ventre versus apicem bicarinato, marginibus carinisque alaeformibus, apice crenulato-denticulatis.

Habitat Javam. Ad frondem *Hymenophylli.* Herb. Dz. et Mb. In foliis *Paratropiae rigidae* Var. *venosae* Miq. Herb. Jungh.

Plantula subramosa, 0,003—0,005 longa, cum foliis 0,0018 lata, patellis suctoriis repens. Folia semiverticalia, laxe imbricata, obovato-spathulata, apice latissima, rotunda, denticulata, sub apice saepe dente longiore armata, versus basin utrinque attenuata; lobulus convexus, ovatus, apice truncato et denticulato. Textura foliorum e cellulis parvis, ovali-rotundis, aequalibus. Amphigastria nulla. Fructus in ramulo terminalis. Folia involucralia angustiora. Perianthium involucrum subaequans, obovatum, compressum, apice crenulato-denticulatum, marginibus tenuibus; ventris carinae versus apicem binae, alaeformes. Spica mascula in planta fructifera, subsessilis. Folia perigonialia e 4 paribus, orbiculata, lobulo involuto.

Foliorum forma proxima *Lejeuniae floccosae* L. et LDBG. sed eorum textura et perianthio longe recedit. *Lejeunia pellucida* MEISSN. foliis orbiculatis et amphigastriis gaudet, nec non perianthiis pentagonis, integerrimis.

Dicavi speciem Viro amicissimo Doct. F. DOZY. Conjunctis studiis cum amico suo Doct. MOLKENBOER inchoavit illustrationem *Florae Bryologicae Javanicae* et post hujus mortem per biennium continuavit. Morbo gravi afflictus, in damnum scientiae eheu! hisce diebus extra Patriam succubuit. Merita in Botanicen horum Duumvirorum laudibus meis sunt superiora.

TABULA XII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *caulis a dorso visus, vicies auctus; f.* 3. *caulis cum spicis masculis a ventre, vicies auctus; f.* 4. *folium singulum, quadragies auctum; f.* 5. *textura folii, centies aucta; f.* 6. *perianthium a dorso, quadragies auctum; f.* 7. *perianthium cum foliis involucralibus a ventre, quadragies aucta.*

171. LEJEUNIA VENUSTA v. D. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 420. DOZY *Plagiochila Sandei.* p. 9. Caule repente ramoso; foliis contiguis semiverticalibus ovatis obtusis, supra muricatis, margine dentato-ciliatis, lobulo ovato tumido truncato-dentato; amphigastriis nullis; fructu laterali sessili; perianthio obovato compresso, tota superficie muricato, ventre bialato, marginibus alisque dentato-ciliatis.

Habitat Javam. Ad frondem *Hymenophylli,* cum *Lejeunia Dozyana.* Herb. Dz. et MB.

Caulis radicibus longiusculis repens, 0,005 longus, cum foliis 0,0008 latus, subramosus. Folia contigua, oblique et semiovata, obtusa, dentato-ciliata; margo dorsalis rotundatus; ventralis rectior; dorsum papillis conicis, elongatis exasperatum; lobulus ovatus, tumidus, apice truncato, denticulato. Textura foliorum e cellulis parvis, quadratis et rhomboideis, versus basin majoribus. Amphigastria nulla. Fructus lateralis, sessilis. Folia involucralia conformia. Perianthium involucrum superans, obovatum, compressum, totum muricatum, ventre bicarinatum, carinis marginibusque alaeformibus, dentato-ciliatis.

Lejeunia Haskarliana GOTTSCHE. proxima, foliorum et perianthii forma diversa est.

TABULA XII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a ventre visa, quadragies aucta; f.* 3. *folium singulum a dorso, octogies auctum; f.* 4. *idem a ventre, octogies auctum; f.* 5. *textura folii a dorso, ducenties aucta; f.* 6. *perianthium cum foliis involucralibus a dorso, sexagies aucta; f.* 7. *eadem a ventre, sexagies aucta.*

b. Perianthio superne acute pentagono angulis ciliatis, dentatis vel crenatis.

172. LEJEUNIA INCHOATA Meissn. *Syn. Hep.* p. 545. Caule repente vage ramoso; foliis remotiusculis subverticalibus divergentibus sursumque versis semiovato-rhomboideis acuminatis, margine dentato-spinulosis, subtus sinuato-complicatis, lobulo inflato; amphigastriis minutis distantibus ovato-triangularibus profunde bifidis, laciniis divergentibus; fructu laterali; perianthio cyathiformi, superne quinquangulari cristato-laciniato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Ad frondem *Filicum* et folia *Paratropiae rigidae* Var. *venosae* Miq. Herb. Junghi. Ad folia coriacea. Herb. Dz. et Mb. In foliis *Podocarpi*. Herb. Reinw. — Celebes. In foliis *Cyrtandrae Sandei* de Vriese. Herb. Reinw. Var. *β javanica*. In Java legit Zollinger, coll. n°. 5558.

173. LEJEUNIA HASKARLIANA Gottsche. *Syn. Hep.* p. 546. Caule repente ramoso; foliis verticalibus ovato-lanceolatis, dorso areolis conicis muricatis, lobulo magno convoluto-inflexo, toto ambitu cellulis conicis serrulatis; amphigastriis nullis; perianthio parvo obovato-clavato, tota superficie echinato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Junghi.

c. Perianthio superne pentagono, ore demum in 4 lacinias subulatas fisso, angulis integerrimis.

174. LEJEUNIA TERNATENSIS Gottsche. *Syn. Hep.* p. 541. Caule repente vage ramoso; foliis subimbricatis e basi semicordata longe acuminatis ovato-lanceolatisque, margine repandis, apice deflexis, basi decurrente subtus complicatis, lobulo magno inflato; amphigastriis parvis distantibus profunde bifidis, laciniis subulatis divergentibus; fructu laterali in basi ramorum sessili; foliis involucralibus inaequaliter serrato-spinulosis; perianthio obovato superne acute pentagono, angulis integerrimis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Ternate. Syn. Hep.

175. LEJEUNIA TRIDACTYLA Gottsche. *Syn. Hep.* p. 547. Caule repente ramoso; foliis distantibus, basi dorsali longe solutis, margine dorsali dentibus tribus trifido, subtus lobulo complicato (singulis areolis mamillatis.

ut cujusvis plicae margo et lobulorum et foliorum, si margines a latere conspicias, tuberculatus videatur, — quam texturam singularem etiam amphigastria participant); amphigastriis bifidis, laciniis subulatis; fructu laterali sessili, innovationibus sub involucro praesentibus; perianthiis obovatis pentagonis, carina dorsali simplice, ventralibus binis; foliis involucralibus majoribus bilobis, lobis margine 3—4 dentibus ornatis; amphigastrio involucrali alteri folio perichaetiali connato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh.

176. LEJEUNIA MURICATA Gottsche. *Syn. Hep.* p. 548. Caule repente filiformi simpliciusculo; foliis adproximatis verticalibus adscendenti-erectis ovatis, margine reflexis pinnatifidis, segmentis inciso-fimbriatis, basi complicatis, lobulo subsaccato; amphigastriis remotiusculis bifidis, laciniis margine subreflexis inciso-fimbriatis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

d. Perianthio laevi, dorso et ventre (rarius ventre solo) carinato, plerumque pentagono.

* *Acutifoliae. Foliis acuminatis, acutis vel cuspidatis.*

177. LEJEUNIA MOLKENBOERIANA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 421. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 9. Caule repente vage ramoso; foliis imbricatis semiverticalibus cordato-ovatis acutis, apice inflexis integerrimis, basi exciso-complicatis, lobulo inflato ovato; amphigastriis imbricatis folia subaequantibus cordato-ovatis, ad medium usque bifidis, laciniis acuminatis; fructu in ramulo brevi laterali; perianthio obovato, dorso uni-, ventre bicarinato.

Habitat Javam. In fronde *Filicum.* Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

Pallescens. Caulis repens, 0,02—0,03 longus, cum foliis 0,001 latus, ramosus, ramis breviter ramulosis. Folia basi imbricata, semiverticalia, integerrima, cordato-ovata, acuta, cuspidata et acuminata, apice subinflexa; margo dorsalis planus, basi cordatus et ultra caulem productus; ventralis basi exciso-lobatus, lobulus inflatus, ovatus, apice rotundato-truncatus. Amphigastria folia aequantia vel paulo minora, contigua, adpressa, cordato-ovata, ad medium et ultra medium bifida, laciniis ovato-lanceolatis, acuminatis. Textura foliorum e cellulis ovali-rotundis, in medio folio versus caulem amplioribus. Fructus lateralis, subsessilis. Folia involucralia conformia, lobulus planus, ovatus, acutus. Amphigastrium involucrale reliquis majus, ovatum, brevius bifidum, laciniis acutis. Perianthium obovatum, dorso uni-, ventre bicarinatum, marginibus carinisque ventralibus latis, compressis. Spica mascula in planta fuctifera, sessilis, ovata, e foliorum paribus 6 composita.

A *Lejeunia conformi* Mont., cui proxima, differt foliis cordato-ovatis, inaequaliter textis et amphigastriis majoribus, laciniis acuminatis.

Sacram esse velim memoriae Viri amicissimi Doct. J. H. Molkenboer, praematura morte, quam omnes lugent, e vita sublati.

TABULA XII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso, vicies et quinquies aucta: f.* 3. *pars caulis a ventre visa, vicies et quinquies aucta. f.* 4. *folium singulum, quinquagies auctum; f.* 5. *textura folii, septuagies et quinquies aucta; f.* 6. *amphigastrium caulinum, quinquagies auctum; f.* 7. *perianthium cum involucro, quadragies aucta.*

178. LEJEUNIA APICULATA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 421. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 10. Caule repente bipinnato-ramoso; foliis contiguis subhorizontalibus ovato-ellipticis, apice planis acutis et cuspidulatis integerrimis, basi subsinuato-complicatis, lobulo tumido ovato emarginato-unidentato; amphigastriis minutis distantibus ovatis, ad medium usque bifidis, laciniis rectis acutis; fructu in ramulo laterali subsessili; perianthio obovato, dorso uni-, ventre bicarinato.

Habitat Javam. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. In monte Salak. Zollinger coll. sub. n°. 5560. Herb. Jungh.

Pallescens, repens. Caulis 0,01 longus, cum foliis 0,0006 latus, subbipinnatim ramosus, ramulis patentibus, versus apicem saepe angustioribus, laxifoliis. Folia subhorizontalia, adproximata, ovata, elliptica, integerrima; margo dorsalis rotundatus; ventralis rectior, ante lobulum subsinuatus; apex brevi-cuspidatus, planus; lobulus vix decurrens, inflatus, ovatus, apice emarginato-unidentatus. Textura foliorum e cellulis subrotundis, versus margines minutis. Amphigastria minuta, distantia, ovata, ultra medium bifida, laciniis lanceolato-subulatis. Fructus saepe adproximati, subsessiles. Folia involucralia biloba; lobus ventralis planus, edentulus. Amphigastrium involucrale reliquis majus. Perianthium obovatum, dorso uni-, ventre bicarinatum, carinis angustis. Spica mascula in planta fructifera, e foliorum paribus 6.

TABULA XIII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso, quadragies aucta; f.* 3. *pars caulis cum spica mascula a ventre, quadragies auctae; f.* 4. *folium singulum, centies auctum: f.* 5. *amphigastrium caulinum, centies auctum; f.* 6. *perianthium cum involucro et fructu, quadragies aucta.*

** *Macrolobae. Foliis obtusis, lobulo magno vel margine fere toto inflexo.*

179. LEJEUNIA FALSINERVIS v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 421. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 9. Caule repente ramoso, ramis elongatis; foliis semiverticalibus contiguis oblongo-cultratis repandis obtusis, medio linea pellucida cellularum majorum notatis, apice subinflexis,

lobulo plano oblongo, apice emarginato-unidentato; amphigastriis distantibus, e basi subdecurrente ovalibus bifidis, laciniis acutis; fructu in ramulo laterali; perianthio obovato-pyriformi, dorso uni-, ventre bicarinato.

Habitat Javam. Herb. JUNGH.

Caulis repens, ex amphigastriorum dorso radicans, circiter 0,035 longus, cum foliis 0,001 latus. Rami vagi, elongati, ramulis iterum obsessi. Folia subhorizontalia, adproximata et contigua, oblongo-subfalcata, obtusa et acutiuscula, subdeflexa; margo ventralis subrepandus, rotundatus; ventralis subarcuatus, breviter decurrens; lobulus planus, oblongus, ad medium folii marginem et ultra productus, apice emarginato-unidentatus. Textura foliorum e cellulis parvis, ovalibus; cellulae mediae majores, oblongae, serie subsimplici dispositae, vittam simulantes, ante apicem evanidam. Amphigastria distantia, ovalia, subdecurrentia, bifida, laciniis acutis. Fructus in ramulo lateralis. Folia involucralia acutiuscula. Amphigastrium caulinis majus, ovatum. Perianthium obovato-pyriforme, dorso uni-, ventre binarinatum, carinis parum elevatis.

Cum nulla specie commutari potest. — Medium tenet inter *Lejeunias Acutifolias et Macrolobas.*

TABULA XIII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso, vicies aucta; f.* 3. *ramulus a ventre, vicies auctus; f.* 4. *folium singulum, quinquagies auctum; f.* 5. *textura apicis folii, centies et quinquagies aucta; f.* 6. *amphigastrium caulinum, quinquagies auctum; f.* 7. *ramus fructifer a ventre, tricies auctus.*

180. LEJEUNIA TRAPEZIA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 357. Caule repente subsimplici; foliis subhorizontalibus dense imbricatis explanatis trapezoideo-subovatis orbiculatisve integerrimis, basi subtus complicatis, lobulo oblongo angusto truncato; amphigastriis subdistantibus foliis quadruplo minoribus orbiculatis acute bifidis, laciniis subcontiguis acutiusculis; fructu laterali sessili; involucri foliis duobus conformibus paulo minoribus; amphigastrio obovato; perianthio obovato truncato, dorso plano bicostulato, ventre medio obtuso carinato. *Syn. Hep.* l. c.

β. minor; magis conferta. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. *α.* Buitenzorg. Herb. MIQ. Herb. DZ. et MB.

Caulis in nostris est pinnatim ramosus

181. LEJEUNIA IMBRICATA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 359. Caule repente laxe ramoso; foliis arcte imbricatis oblongis obtusissimis integerrimis, margine dorsali basi rotundatis, ventrali sub apice sinuato-complicatis, lobulo oblongo angusto obliquo, extrorsum truncato vel in brevem dentem excurrente;

amphigastriis remotis ovalibus bifidis, laciniis acuminatis subconniventibus; fructu ... *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

182. LEJEUNIA INCISA GOTTSCHE. *Syn. Hep.* p. 360. Caule repente ramoso; foliis imbricatis ovatis convexis integerrimis obtusis, apice oblique deflexis; margine ventrali complicatis, lobulo oblongo, apice extrorsum truncato vel in folium transeunte; amphigastriis triplo minoribus contiguis subrotundis decurrentibus, breviter angusteque emarginato-incisis, dentibus acutis; fructu in axillis sessili; perianthio obovato subpentagono, angulis lateralibus latis compressis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. — Borneo. Herb. Dz. et MB.

183. LEJEUNIA DISCRETA LINDBG. *Syn. Hep.* p. 361. Caule repente vage ramoso; foliis imbricatis subverticalibus convexis ovato-orbiculatis, apice deflexis, margine ventrali sinuato-complicatis, lobulo magno involuto ventricoso; amphigastriis distantibus ovatis convexis ad medium acute bifidis, laciniis subconniventibus acutis; fructu ... *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

Amphigastria in speciminibus nostris plana. Perianthium obovatum, pentagonum, tubo longo coronatum.

*** *Contiguae. Foliis ovatis, amphigastriis arcte imbricatis majusculis.*

184. LEJEUNIA TRIFARIA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 361. Caule repente dichotomo; foliis horizontalibus arcte imbricatis orbiculatis integerrimis deflexiusculis, basi in lobulum saccatum decurrentibus; amphigastriis imbricatis subquadratis acute bifidis; fructu laterali; foliis involucralibus elongatis, lobulo oblongo ovato explanato; perianthiis brevibus obovatis quinqueplicatis, angulis compressis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

185. LEJEUNIA HETEROPHYLLA v. D. SD. LC. in DE VRIESE. *Plant. Ind. Batav. Reinwardtian.* p. 24. Caule repente elongato inordinate pinnato; foliis imbricatis semiverticalibus rotundis ovatisve integerrimis, apice deflexis, basi sinuato-complicatis, lobulo decurrente parvo convexo emarginato-unidentato; amphigastriis folia subaequantibus imbricatis orbiculato-subtransversis convexis, sinu brevi aperto bifidis, laciniis acutis; fructu in ramulo brevi; involucri foliis ovatis acutis; perianthio obovato quinquangulari.

Habitat Javam. Herb. JUNGH. Herb. Dz. et Mb. — Ternate. Herb. REINW.

Fusco-lutescens, 0,02—0,025 longa. Caulis cum foliis 0,001 fere latus, pinnatim ramosus, pinnis divaricatis, irregularibus, inaequalibus. Folia laxe imbricata, semiverticalia, integerrima, planiuscula, sed apice deflexa, rotunda vel ovata, obtusa, raro nonnulla acutiuscula, basi ventrali sinuato-complicata; lobulus decurrens, parvus, ovato-triangularis, convexiusculus, apice emarginato-unidentatus. Amphigastria folia subaequantia, laxe imbricata, orbiculata, subtransversa, convexa, integerrima, apice ad quartum partem fissa, sinu acuto, aperto laciniisque acutis. Textura foliorum e cellulis parvis, aequalibus, rotundis. Fructus in ramulo brevi, lateralis. Folia involucralia ovata, integerrima, acuta; lobulus elongatus, planus, obtusiusculus. Amphigastrium involucrale ovatum, integerrimum, profundius bifidum, laciniis acutis. Perianthium obovatum, quinquangulare, angulis elevatis, acutis.

Accedit *Lejeuniae tereliusculae* LINDBG. et *Lejeuniae opacae* GOTTSCHE; huic tamen magis, quam illi est affinis. A priori differt statura robustiori, foliis minus convexis, et amphigastriis laxius imbricatis; a posteriori foliis apice deflexis et amphigastriis subtransversis; ab utraque recedit foliis magis minusve ovatis. *Lejeunia Lindenbergii* GOTTSCHE amphigastriis indivisis gaudet.

186. LEJEUNIA TERETIUSCULA LDBG. *Syn. Hep.* p. 564. Caule repente filiformi rigidulo vage ramoso; foliis imbricatis semiverticalibus orbiculatis convexis inflexis integerrimis, basi subtus sinuato-complicatis, lobulo inflexo tumidulo truncato-unidentato; amphigastriis folia subaequantibus imbricatis reniformi-orbiculatis integerrimis breviter incisis, sinu laciniisque acutis, his conniventibus; fructu laterali sessili; perianthio obovato compresso quinquangulari, angulis latis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et Mb.

187. LEJEUNIA SORDIDA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 567. Caule repente vage ramoso; foliis subimbricatis ovalibus integerrimis, subtus basi lobulo parvo complicatis; amphigastriis folia aequantibus vel superantibus transversalibus subcordatis, sinu parvo incisis, lobis acutis; fructu in ramulis laterali sessili; foliis involucralibus diversiformibus inaequaliter bifidis; perianthio oblongo-obovato compressiusculo quinquangulari. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et Mb.

**** *Obtusifoliae. Foliis oblongo-rotundis rarius ovatis, lobulo parvo, amphigastriis distantibus parvis.*

188. LEJEUNIA APTYCTA GOTTSCHE. *Syn. Hep.* p. 569. Caule repente subpinnatim ramosissimo, foliis imbricatis ovatis convexis, versus apicem, praesertim in ramis junioribus, deflexis vel circa caulem imbricato-convolutis, decurrenti-complicatis, lobulo parvo convoluto; amphigastriis rotundatis bifi-

dis, sinu aperto, laciniis acutis, paullo decurrentibus; fructu laterali sessili in ramis; perianthio laevissimo (absque ulla plica) elliptico, dorso ventreque convexo; foliis involucralibus conformibus, lobulo parvo acuminato; amphigastrio involucrali ovali bifido. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

189. LEJEUNIA LINEATA L. et Ldbg. *Syn. Hep.* p. 371. Caule repente vage ramoso; foliis semiverticalibus imbricatis ovatis elongatis, apice deflexis integerrimis vel subrepandis, basi sinuato-complicatis, lobulo majusculo ventricoso; amphigastriis ovato-rotundatis acute bifidis, laciniis ovatis acutis erectis; fructu laterali saepe in serie disposito; perianthio cylindrico-compresso incurviusculo laevi, ad apicem carina dorsali et ventrali obtusa obsoleta subdistantibus, quadrangulato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

***** *Serpyllifoliae.*

190. LEJEUNIA THYMIFOLIA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 372. Caule repente subdichotomo subpinnatove; foliis imbricatis ovalibus, apicem versus angustatis, obtusis integerrimis amoene luteis, subtus convoluto-complicatis, lobulo rotundato, extrorsum truncato; amphigastriis magnis imbricatis cordato-ovatis bifidis, lobis rectis acutis integerrimis, lobulos foliorum omnino tegentibus; fructu terminali et laterali ad basin ramorum; perianthio obovato acute pentagono, involucro subimmerso; foliis involucralibus ovato-lanceolatis obtusis, lobulo linguaeformi; amphigastrio magno oblongo-cordato, ad medium bifido. *Syn. Hep.* l. c.

β. indica; foliis minus arcte imbricatis, lobulo minori; amphigastriis minoribus profundius incisis; perianthiis elongatis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

191. LEJEUNIA SERPYLLIFOLIA Libert. Dumort. *Comm. Bot.* p. 111. Caule vage ramoso laxo gracili subfasciculato; foliis ovato-subrotundis (oblongisve) obtusis convexiusculis, basi subsinuato-complicatis, plica saccata oblique ovata, folio suo plus duplo breviori; amphigastriis folio triplo (duplove) minoribus subrotundis bifidis, laciniis obtusiusculis; perianthio in ramulo brevissimo laterali (terminalive) obovato clavatove, sursum acute quinquangulari, ore mucronato. *Syn Hep.* p. 374.

Habitat Javam. Holle in Herb. Dz. et Mb.

192. LEJEUNIA LAXA Lindbg. *Syn. Hep.* p. 378. Caule intricato inor-

dinate ramoso flexuoso; foliis distantibus flaccidis obovatis, margine dorsali rotundatis, ventrali rectiusculis, basi angustata decurrente minute complicatis, lobulo nonnumquam obsoleto; amphigastriis remotis parvis rotundo-ovatis patulis profunde bifidis, laciniis acuminatis; fructu in ramulorum basi sessili; foliis involucralibus conformibus obtusis; perianthio involucrum duplo superante obovato acute pentagono. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Buitenzorg. Herb. MIQ.

In Herb. Dz. et MB. asservatur planta e Java *Lejeuniae laxae* LDBG. subsimilis, sed diversa colore amoene luteo et amphigastriis margine utroque extus medio uni-dentatis. Perianthium deest.

193. LEJEUNIA ALOBA v. d. SD. LC. in DOZY *Plagiochila Sandei.* p. 10. Caule repente parce ramoso; foliis subhorizontalibus imbricatis planis ovato-rotundis obtusis integerrimis, basi ventrali rectiusculis, plica subnulla; amphigastriis distantibus, foliis quadruplo minoribus ovatis bifidis, laciniis obtusis; fructu . . .

Habitat Javam. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

Caespitosa, pallida. Caulis repens, 0,03 longus, cum foliis 0,001 latus, magis minusve ramosus. Folia subhorizontalia, imbricata, patentia, plana, integerrima, ovali-rotunda, obtusa, basi subrecta, plica parva, triquetra aut nulla. Amphigastria distantia, patula, parva, caule paulo latiora, integerrima, subrotunda, bifida, laciniis ovatis, obtusis et acutiusculis. Textura foliorum laxior, e cellulis subrotundis, limitibus subtilibus, contiguis. Reliqua non visa.

Distinguitur a *Lejeunia serpyllifolia* LIB., cui vicina, foliis majoribus, subrotundis, cellulis paullo amplioribus, limitibus subtilibus, subcontiguis, plica basilari subnulla, amphigastriis minoribus.

TABULA XIII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso, quadragies aucta; f.* 3. *ramus a ventre, tricies auctus; f.* 4. *textura folii, centies aucta; f.* 5. *amphigastrium caulinum, centies auctum.*

194. LEJEUNIA DECURSIVA v. d. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 522. DOZY *Plagiochila Sandei.* p. 10. Caule repente pinnato, pinnis inaequalibus; foliis adproximatis semi-subverticalibus patentibus rotundo-oblongis obovatisve integerrimis, basi sinuato-complicatis longe decurrentibus, lobulo tumido ovato, apice obtuso in folii marginem transeunte; amphigastriis distantibus patulis rotundo-ovatis bifidis, laciniis obtusis; fructu ad basin

ramorum subsessili; involucri foliis conformibus; perianthio obovato, dorso uni-, ventre bicarinato.

Habitat Javam. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

Olivacea, rigidula, repens. Caulis 0,005 longus, cum foliis 0,0004 latus, pinnatim ramosus; pinnis patentibus, inaequalibus, apice angustioribus. Folia adproximata, verticaliter patentia, rotundo-oblonga vel obovata, obtusa, integerrima, margine ventrali profunde sinuata, longe decurrentia; lobulus folio suo dimidio brevior, ovatus, tumidus, apice truncato-rotundatus. Amphigastria parva, caulis latitudinem aequantia, distantia, patula, rotundo-ovata, bifida, laciniis obtusis. Textura foliorum e cellulis parvis, subrotundis, limitibus discretis. Fructus ad basin ramorum sessilis. Folia involucralia biloba; lobi dorsales aequales, obtusi; ventrales adplanati, truncati. Amphigastrium involucrale caulinis conforme, majus. Perianthium obovatum, apice pentagonum, angulis latiusculis, acutis.

Differt a *Lejeunia serpyllifolia* LIB. et *Lejeunia aloba* foliis longe decurrentibus, densius textis; a *Lejeunia laxa* LDBG. insuper amphigastriis obtusis.

TABULA XIV.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso visa, quadragies aucta; f.* 3. *ramus a ventre visus, quadragies auctus; f.* 4. *folium, septuagies et quinquies auctum; f.* 5. *textura folii, centies et quinquagies aucta; f.* 6. *amphigastrium caulinum, centies auctum; f.* 7. *perianthium cum foliis involucralibus a dorso, tricies aucta; f.* 8. *perianthium et involucrum a ventre, tricies aucta.*

195. LEJEUNIA CUCULLATA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 389. Caule pusillo filiformi subpinnato repente parasitante; foliis verticalibus orbiculato-oblongis integerrimis vel basi ventrali cellulis prominentibus crenulatis, basi producta cucullata inflata, laevi sinu a lobo subjecto subaequali divisa; amphigastriis distantibus, foliis multo minoribus, ovalibus bifidis; fructu in ramis brevibus terminali vel in ramulorum basi sessili; foliis involucralibus conformibus planiusculis; perianthio emerso obovato compresso, dorso obtuse carinato, ventre convexo, ad apicem acute bicarinato. *Syn. Hep.* l. c.

α. major; caule filiformi subpinnato semipollicari et majori; foliis adproximatis, saepe contiguis, lobulo suo vix dimidio majoribus rotundatis, lobulo ad sinum unidentato. l. c.

β. exilis; tenerrima, nudo oculo vix percipienda; foliis remotissimis, lobulis foliorum (i. e. folio lobuloque) subaequalibus rotundatis, interjectis hinc inde inter folia majora aliis minoribus subulatis, modo cum iisdem alternantibus, modo binis pluribusve ab eodem latere ordine suo sequentibus. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. Herb. Dz. et MB. Herb. MIQ. ZOLL.

196. LEJEUNIA TENUIS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 390. Caule pusillo filiformi subpinnato repente parasitante; foliis distantibus erectiusculis oblique ovato-lanceolatis subfalcatisve, apice subinflexis, vel oblongis acuminatis integerrimis et margine subrepandis, vel cellulis prominentibus muricatis, lobulo angustiore in folii marginem transeunte; amphigastriis minutis distantibus bipartitis, laciniis subulatis erectis vel divergentibus, saepe dimidiatis aut obsoletis; fructu in ramulis terminali et ad basin ramorum sessili; foliis involucralibus perianthium aequantibus planis bilobis, apice subulatis; perianthio clavato, ad apicem acute quinquangulari. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

* * * * * * *Duplicatae. Amphigastriis vel duplicatis vel nullis.*

197. LEJEUNIA PELLUCIDA MEISSN. *Syn. Hep.* p. 395. Caule repente adpresso, vage parceque ramoso; foliis imbricatis cordato-ovatis integerrimis, basi subtus complicatis, lobulo ovato inflato, margine unidentato, dente subulato; amphigastriis duplicatis distantibus bipartitis, laciniis divergenti-divaricatis lanceolatis; fructu laterali sessili; foliis involucralibus minoribus conformibus, lobulo lanceolato acuto; perianthio obovato acute pentagono. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Herb. Dz. et MB. — Sumatram. Herb. JUNGH.

198. LEJEUNIA VESICARIA v. D. SD. Lc. Caule repente subramoso breviterque pinnato; foliis imbricatis subhorizontalibus orbiculatis convexis integerrimis, apice deflexis, basi subsinuato-complicatis, lobulo magno inflato ovato-elliptico, apice bidentato, dentibus subulatis subincurvis; amphigastriis obsoletis; fructu . . .

Habitat Sumatram. In monte Lubu Radja, altit. 5000′—5800′, repens in ramis *Leptospermi floribundi* Form. *Sumatrana* MIQ., cum *Radula formosa* N. ab E. Herb. JUNGH.

Caulis radiculis sparsis, filiformibus, repens, 0,01 longus, cum foliis 0,003 latus, parce ramosus. Rami elongati, vel pinnae sub foliis caulinis reconditae. Folia imbricata, subhorizontalia, orbiculata et ovato-orbiculata, convexiuscula, apice deflexa, integerrima; lobulus saepe folii longitudinem et dimidiam latitudinem aequans, inflatus, ovato-ellipticus, apice truncato-bidentatus, dentibus subulatis, incurvis, superiore longiori. Textura foliorum spissa; cellulae aequales, parvae, subrotundae. Amphigastria nulla, eorum loco squamulae difformes. Spica mascula in caule sesssilis, ovata, e paribus foliorum 6 composita. Folia perigonialia arcte imbricata.

Differt a *Lejeunia marginata* L. et Ldbg. foliis horizontalibus, apice deflexis, textura aequali et lobulis inflatis.

TABULA XIV.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso visa, decies et quinquies aucta; f.* 3. *planta a ventre visa, decies et quinquies aucta; f.* 4. *folium singulum, vicies et quinquies auctum; f.* 5. *textura folii, sexagies aucta.*

§. 3. Ceratanthae. Calyx apice plus minus cornutus.

a. Genuinae. *Amphigastriis subrotundis bifidis, foliorum lobulis nonnullis maximis cucullatis.*

199. LEJEUNIA BELANGERIANA Gottsche. *Syn. Hep.* p. 398. Caule repente rigidulo, irregulariter iterum diviso; foliis subimbricatis oblongis integerrimis obtusis et acutiusculis, nonnullis emarginato-inaequaliter-bidentatis, lobulo nullo vel parvo; amphigastriis subdistantibus rotundo-ovatis, basi subdecurrentibus, ad medium usque acute bifidis; fructu in ramulorum basi sessili; foliis involucralibus serratis; perianthio obovato elongato quadricorni, cornibus longis erectis divergentibusque subflexuosis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh.

b. Aberrantes. *Amphigastriis bipartitis, laciniis subulatis divergentibus, nonnumquam obsoletis.*

200. LEJEUNIA VITREA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 402. Caule repente pinnatim decomposito; foliis explanatis sursumve adscendenti-conniventibus subimbricatis elliptico-obovatis subtruncatis rotundatis et acutiusculis, margine muricato-denticulatis, basi attenuatis, subtus complicatis, lobulo subinflato; amphigastriis minutis distantibus profunde bifidis, laciniis subulatis divergentibus; fructu laterali sessili; perianthio parvo obovato quadri-quinquecorni, cornibus compressiusculis divergentibus. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Ad folia in monte Prabakti. Zollinger, coll. n°. 3505. In foliis *Paratropiae.* Herb. Jungh.

201. LEJEUNIA ELLIPTICA Lehm. et Ldbg. *Syn. Hep.* p. 403. Caule arcte repente inordinate ramoso; foliis subhorizontalibus subdistantibus ellipticis planis integerrimis, basi attenuata subtus breviter complicatis perforatis, lobulo subinflato saepe obsoleto; amphigastriis distantibus profunde bipartitis, laciniis subulatis subdivergentibus integrisve; fructu laterali sessili; foliis involucralibus elongatis integerrimis; perianthio obovato superne 4-5-alato, alis plerumque in cornu elongatis. *Syn. Hep.* p. 403.

α. conferta; brevior, foliis adproximatis subplanis latioribus, ubique perforatis; amphigastriis obsoletis. l. c.

Habitat Javam. In folio quodam. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

202. LEJEUNIA CERATOPHORA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 405. Exigua; caule divergenti-ramoso repente, foliis adproximatis patenti-adscendentibus oblongis, inferne subtus parallele convolutis, hinc apice cucullato-dilatatis cuspidato-cornutis; amphigastriis bifidis, laciniis divergentibus subulatis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. ZOLLINGER, coll. n°. 586 A. In foliis. Herb. Dz. et MB.

Folia apice cucullato-dilatata, nec cornuta; involucralia parva, plana. Fructus lateralis, sessilis. Perianthium elongatum, clavato-prismaticum, tricorne; cornibus compressis, divergentibus.

Planta, quam memorat *Synopsis Hepaticarum* l. c. in *Adnotatione*, hujus nominis haud videtur.

XXV. FRULLANIA RADDI.

I. Auriculae foliorum galeatae cucullataeve rotundae.

1. *Appendiculatae, foliis basi subtus complicatis in lobulum longiorem, apice in cucullum vel galeam abeuntibus.*

a. Perianthium cylindricum laeve.

203. FRULLANIA TERES v. D. SD. LC. Caule repente bipinnatim ramoso; foliis imbricatis convexis ovato-orbiculatis integerrimis, margine, praesertim apice, inflexo-involutis, auriculis parvis tectis lunatis, appendiculo producto integerrimo planiusculo; amphigastriis imbricatis rotundo-transversis integerrimis, margine inflexis, sinu obtuso emarginato-bidentatis; fructu sessili vel in ramulo terminali; foliis involucralibus breviter bifidis, laciniis ventralibus amphigastrioque involucrali margine inciso-serratis; perianthio involucrum subsuperante cylindrico laevi, ore obsolete plicato.

Habitat Javam. In monte Ungarang. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Herb. v. D. BOSCH.

Caulis rigidulus, fuscus, repens, irregulariter bipinnatimque ramosus, 0,05 longus, basi aphyllus, cum foliis 0,003 latus. Folia dense imbricata, semiverticalia, convexa, integerrima, ovato-orbiculata, apice vel etiam marginibus inflexo-involuta; auriculae parvae, tectae, lunatae et subrostratae; appendiculus productus, integerrimus, planus vel subinflexus. Amphigastria imbricata, rotundo-transversa, dorso radiculosa, integerrima, margine inflexa (rarius reflexa), sinu obtusiusculo emarginato-bidentata. Textura foliorum e cellulis mediocribus quadrato-

ovalibus. Fructus sessilis vel in ramulo elongato terminalis. Folia involucralia perianthium amplectentia, convexa, breviter bifida; lacinia dorsalis late ovata, obtusiuscula; ventralis lanceolata, acuta, margine externo inciso-serrata. Amphigastria involucralia magna, convexa, ovata, inciso-serrata, apice bifida, laciniis cuspidato-acutis. Perianthium involucro paullo emersum, teres, laeve, ore solo obsolete sulcato vel prorsus laevi. Spica mascula ovata.

A confinibus distinguitur foliis amphigastriisque late inflexis et perianthio. Notis quibusdam accedit *Frullaniae ornithocephalae* N. ab E., sed appendiculis obviis et perianthii forma facile distinguenda.

TABULA XV.

Fig. 1. *Plantae magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso visa, decies aucta; f.* 3. *pars plantae cum fructificatione a ventre visa, septies aucta; f.* 4. *pars caulis a ventre, amphigastriis sublatis, ut auriculae et appendiculi conspici possint, decies aucta; f.* 5. *folium singulum a ventre, vicies auctum; f.* 6. *textura folii, centies et quinquagies aucta: f.* 7. *amphigastrium caulinum, vicies auctum; f.* 8. *folium involucrale, decies auctum; f.* 9. *amphigastrium involucrale, vicies auctum; f.* 10. *perianthium, decies auctum; f.* 11. *elater, quinquagies auctus.*

b. Perianthium costato-carinatum.

204. FRULLANIA SEBASTIANOPOLITANA Ldbg. *Syn. Hep.* p. 412. Digyna; caule repente pinnatim decomposito; foliis imbricatis suborbiculatis integerrimis, auricula galeiformi lunata in rostrum longius producta, appendiculo ovato-rotundo deorsum producto integerrimo; amphigastriis foliis duplo minoribus rotundis integerrimis breviter emarginatis, sinu acuto obtusove, dentibus acutis; fructu in ramulis lateralibus; foliis involucralibus perianthium subaequantibus bifidis acutis integerrimis (rarissime subserratis); perianthio oblongo dorso uni-, ventre bicarinato, carina dorsali superne bi-triplicato. *Syn. Hep.* l. c.

β. *galeata;* minus ramosa; auriculis foliorum majoribus confertis, appendiculo breviori; amphigastriis nonnullis indivisis vel obsolete emarginatis. l. c.

Habitat Javam (Var. β). Syn. Hep.

205. FRULLANIA HIANS Lehm. et Ldbg. *Syn. Hep.* p. 414. Digyna; caule pinnatim decomposito; foliis imbricatis rotundis integerrimis, margine ventrali subundulatis, auricula fornicata lunata, appendiculo magno undulato-crispo; amphigastriis contiguis orbiculatis magnis, margine undulato-crenulatis, sinu obtuso brevissime emarginato-bidentatis; fructu in ramis ramulisque terminali; foliis involucralibus cum amphigastrio connatis bifidis, laciniis inciso-serratis,

ventrali longe acuminato-subulato, margine reflexo; perianthio vix involucrum superante oblongo, dorso et ventre pluricarinato. *Syn. Hep.* l. c.

β. javanica; tetragyna, obscure fusca; auriculae appendiculo angulato-dentato; amphigastriis valde undulato-crispis; foliis involucralibus arctius serratis. l. c.

Habitat Javam (Var. β.). Syn. Hep. Herb. JUNGH.

2. *Auriculae non appendiculatae, in nonnullis plures evolutae.*

* Perianthia aspera ciliatave.

a. Amphigastriis emarginato-bifidis.

206. FRULLANIA LACINIOSA GOTTSCHE. LEHM. *Pugill. Pl.* VIII. p. 18. Digyna; caule repente bi-tripinnato fasciculatove; foliis ovatis vel oblongo-ovatis patenti-squarrosis integerrimis, margine ventrali sinuato-emarginatis, auriculis galeatis campanulato-compressiusculis; amphigastriis subrotundis, sinu parvo bifidis, toro radicillarum gibbosis; perianthio oblongo prismatico, dorso trisulcato, ventre unicarinato, basin ad usque a medio laciniis triangularibus densissime villoso. *Syn. Hep.* p. 415.

Habitat Javam. Syn. Hep.

207. FRULLANIA SQUARROSA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 416. Digyna; caule procumbente pinnatim ramoso decompositoque; foliis subverticalibus confertis squarroso-patulis suborbiculatis obtusis integerrimis, auriculis obovato-cucullatis aut galeatis compressiusculis (rarius in lobulum ovato-lanceolatum evolutis), profunde discretis; amphigastriis cordatis rotundisve sinuato-subdentatis breviter emarginato-bifidis, laciniis acutis subconniventibus; fructu in ramulo laterali brevi; involucri lobulo amphigastriisque subdentato-lacinulatis; perianthio oblongo prismatico-triquetro, dorso convexo, medio leviter sulcato, ventre alte unicarinato, carina angulisque papillis conicis tuberculato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. Herb. v. D. BOSCH. TEYSM., HOLLE in Herb. Dz. et MB.

208. FRULLANIA ERICOIDES N. ab E. *Syn. Hep.* p. 417. Digyna; caule procumbente pinnatim ramoso decompositoque; foliis imbricatis subverticalibus squarroso-patulis ovato-oblongis, auriculis plerisque in lobulum ovalem aut ovato-lanceolatum evolutis, marginibus reflexis; amphigastriis ovatis vel obovatis, margine angulato-dentatis, usque ad medium acute bifidis; fructu in

ramulo brevi; foliorum involucralium lobulo ventrali amphigastrioque margine dentatis; perianthio oblongo tuberculato, ventre leviter carinato. *Syn. Hep.* l. c.

β. laxa; foliis superioribus acutiusculis dissitiusculis, maxime squarrosis. l. c.

Habitat Javam. Herb. v. d. Bosch. Var. *β*. Syn. Hep.

Frullania aeolotis N. ab E. forsitan Javae est indigena. Frustula obvia diagnosi vix sufficiunt.

209. FRULLANIA DIPTERA Lehm. et Ldbg. *Syn. Hep.* p. 420. Digyna; caule procumbente bipinnatim ramoso; foliis imbricatis horizontalibus oblique rotundis obtusis integerrimis, auricula fornicata lunata discreta vel lacinia oblonga explanata; amphigastriis ovatis bifidis, laciniis acutis conniventibus, margine anguloso-dentatis; perianthiis in ramulis lateralibus oblongis compressis, carina ventrali 3-costata, costis elevatis et cum angulis lateralibus crenulato-crispatis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Herb. v. d. Bosch.

210. FRULLANIA GLOMERATA Lehm. et Ldbg. *Syn. Hep.* p. 421. Tetragyna; caule repente apicem versus innovante inordinate pinnatimque decomposito; ramis supremis adproximatis confertis fastigiatis; foliis orbiculatis concavis arcte imbricatis, margine subreflexo integerrimis, saepe squarrosis, auricula cucullata magna truncata a caule subdistante; involucralibus longioribus bilobis, lobis sibimet conniventi-incumbentibus, altero suborbiculato integerrimo, altero ovato-lanceolato denticulato, uno alterove cilio praedito; amphigastriis caulinis ex obovato-subcuneatis ad $\frac{1}{3}$ part. bifidis, sinu laciniisque acutis, margine repando-dentato; fructu in ramulis terminali; perianthio obcordato. ventre carinato, margine carinaque ciliatis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Herb. v. d. Bosch.

211. FRULLANIA SEMIVILLOSA Ldbg. et G. *Syn. Hep.* p. 774. Tetragyna; caule repente inordinate ramoso; ramis brevibus iterum pinnatis fasciculatis; foliis ovatis concavis arcte imbricatis integerrimis, auriculis galeatis conico-oblongis subcompressis (floralibus tantum evolutis); amphigastriis ovato-quadratis bifidis, margine angulato-crenatis subunidentatisve (floralibus ciliato-dentatis); perianthio semi-immerso triangulari, angulis carinaque ciliis recurvatis gaudente, ventre semivilloso; foliis involucralibus bilobis, dorsali lobo ovali, lobulo ovato-lanceolato, intus lacinula denticulata aucto subdentato; amphigastrio involucrali laciniato-dentato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Herb. Jungh. Herb. v. d. Bosch.

b. Amphigastriis indivisis.

212. FRULLANIA REFLEXISTIPULA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 422. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 10. Caule repente subpinnatim ramoso; ramulis inaequalibus flexuosis; foliis imbricatis semiverticalibus squarrosulis aut planis orbiculatis, margine recurvis integerrimis, auriculis galeatis compressis; amphigastriis imbricatis transversis indivisis, margine reflexis integerrimis; fructu laterali subsessili; amphigastriis involucralibus bifidis lobulisque involucralibus inciso-ciliatis; perianthio obovato villoso, dorso convexo, ventre late unicarinato, marginibus carinaque compressis eroso-dentatis ciliatisque.

Habitat Javam. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

Caulis flexuosus, 0,03 longus, cum foliis 0,002 latus, repens, vage pinnatimque ramosus. Folia squarrosula vel plana, subhorizontalia, imbricata, orbiculata, latiora, quam longa, margine sursum flexa, integerrima; auriculae cauli subcontiguae, tectae, semigloboso-galeatae, subcompressae, basi truncatae. Textura e cellulis parvis, rotundis, contiguis. Amphigastria magnitudine folia subaequantia, imbricata vel contigua, transversalia, dorso saepe radiculosa, indivisa, margine toto reflexa, integerrima. Involucri folia e 3 paribus, biloba; lobi dorsales ovati, acuti vel obtusi, subintegerrimi; ventrales lanceolato-acuminati, marginibus reflexis, serrato-incisis ciliatisque. Amphigastrium involucrale externum oblongum, apice retusum, integerrimum; interiora apice bifida, margine in lacinias lanceolato-lineares fissa. Perianthium ovatum vel obovatum, compressum, basi imprimis villosum, dorso convexulum; ventre late carinatum, marginibus carinaque eroso-dentatis ciliatisque. Spica mascula oblongo-ovata. Folia perigonialia biloba, lobis obtusis.

Proxima *Frullaniae glomeratae* L. et L., sed ab hac et omnibus *Frullaniis* amphigastriorum forma, vel sterilis dignosci potest.

TABULA XV.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali*; *f.* 2. *caulis a dorso visus, vicies auctus*; *f.* 3. *folium, vicies auctum*; *f.* 4. *textura folii, centies aucta*; *f.* 5. *rami pars, amphigastriis sublatis, a ventre, vicies aucta*; *f.* 6. *amphigastrium caulinum, vicies auctum*; *f.* 7. *perianthium cum involucro a dorso, decies auctum*; *f.* 8. *perianthium cum involucro a ventre, decies auctum*; *f.* 3. *folium involucrale, decies auctum*; *f.* 10. *amphigastrium involucrale internum, vicies auctum*; *f.* 11. *spica mascula, decies et quinquies aucta*; *f.* 12. *folium perigoniale, vicies et quinquies auctum*: *f.* 13. *antheridium, ducenties auctum.*

** Perianthia ventre carinata ceteroquin laevia. Auriculae vel cucullatae vel galeato-conchaeformes.

213. FRULLANIA FALCILOBA TAYLOR. *Hep. antarct.* in *Lond. Journ. of Bot.* 1844. p. 581. Digyna; caule repente ramoso; ramis irregulariter pinnatis; foliis imbricatis ovatis vel ovali-rotundis integerrimis, apice paulum incurvatis; auriculis magnis galeiformibus, sed (a ventre visis) sinu medio quodammodo falcato-truncatis; amphigastriis ovali-rotundis, sinu parvo bilobis; perianthio ventre unicarinato; foliis involucralibus bilobis, lobulo ventrali canaliculato plurilaciniato; amphigastrio involucrali magno bifido, utroque margine unidentato. *Syn. Hep.* p. 425.

Habitat Javam. Herb. v. D. BOSCH. — Sine perianthiis.

214. FRULLANIA ORNITHOCEPHALA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 425. Digyna; caule repente dichotomo-ramoso; foliis dense imbricatis deflexis ovato-orbiculatis obtusis integerrimis; auricula fornicata lunata, basi plica cum folio conjuncta; amphigastriis orbiculatis acute emarginato-bifidis; fructu in ramulo proprio terminali; foliis involucralibus plicatis, auriculis bifidis acuminatis laciniisque amphigastrii serratis; perianthiis longitudine involucri triangularibus obtusis laevibus. *Syn. Hep.* l. c.

α. minor; amphigastriis undulatis, versus summitatem utrinque angulatis vel unidentatis, auricula majori, apice subulata; foliorum involucralium lobo superiori acuminato serrato; colore fusco. l. c.

β. major; amphigastriis in ambitu integerrimis basi complicato-contractis, auricula apice obtusa revoluta; foliorum involucralium lobo superiori obtuso integerrimo; perianthio longitudine involucri triangulari obtuso laevi; colore olivaceo. Ramificatio hujus omnino, qualis *Frullaniae ornithocephalae Var. α.* Amphigastria involucralia maxima, oblonga, bifida, inciso-serrata. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

215. FRULLANIA HUTCHINSIAE N. ab E. *Hep. Eur.* III. p. 240. Digyna; subpinnatim ramosa, sub fructu divergenti-furcata; foliis ovatis acutis dentato-serratis (subintegerrimisve), auricula marginali ovata externe calcarata, involucralibus bifidis serratis; amphigastriis subrotundis planis bifidis subserratis; perianthio, ob innovationes supervenientes, ad speciem dichotomiae imposito oblongo compresso, ventre unicarinato laevi. *Syn. Hep.* p. 426.

α. Foliis valide serratis. l. c.

β. Foliis subintegerrimis, auriculis plerisque ecalcaratis, modo distinctis, modo obsoletis. l. c.

Habitat Javam. Var. α. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Herb. v. D. BOSCH. Var β. Syn. Hep. In iisdem Herbariis.

216. FRULLANIA CAMPANULATA v. D. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Archief* III. p. 422. DOZY *Plagiochila Sandei.* p. 11. Caule repente inordinate ramoso composito; foliis semiverticalibus laxe imbricatis subrotundis obtusis integerrimis, auriculis cauli contiguis denudatis ovato-galeatis subcompressis, margine externo basi dilatatis; amphigastriis distantibus obovatis bifidis laciniisque obtusiusculis, extus anguloso-unidentatis; fructu sessili; foliorum involucralium lobulo basi lacinulato; perianthio brevi subcompresso dorso uni-, ventre bicarinato.

Habitat Javam. JUNGH. in Herb. v. D. BOSCH.

Caulis repens, 0,03 circiter longus, cum foliis 0,01 latus, inordinate ramosus, compositus. Folia laxe imbricata, semiverticalia, ovato-subrotunda, obtusa, integerrima; auriculae nudae, majusculae, cauli contiguae, ovato-campanulatae, basi truncatae, subcompressae. Foliorum textura e cellulis minutis, rhomboideis, limitibus flexuosis, contiguis. Amphigastria parva, distantia, obovata, subcuneata, ad medium fere bifida, laciniis obtusiusculis, extus utrinque unidentatis. Folia involucralia integerrima, biloba; lobus ventralis late ovatus; ventralis angustior, acutus, marginibus reflexis, basi lacinula praeditus. Amphigastrium involucrale majus, profundius bifidum. Perianthium obovato-ellipticum, laeve, subcompressum, dorso uni-, ventre bicarinatum, carinis ventralibus latioribus, acutis, versus perianthii margines vergentibus.

Frullaniae aeolotidi N. ab E. pluribus notis affinis, at differt perianthio prorsus laevi.

TABULA XIV.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso visa, vicies et quinquies aucta; f.* 3. *ramus a ventre, vicies et quinquies auctus ; f.* 4. *folium singulum, quinquagies auctum; f.* 5. *textura folii, ducenties aucta; f.* 6. *cellulae folii magis auctae; f.* 7. *amphigastrium caulinum, septuagies et quinquies auctum; f.* 8. *ramus fructifer a ventre, vicies auctus; f.* 9. *folium involucrale cum gemmis, tricies auctum; f.* 10. *perianthium cum foliis involucralibus a dorso visa, vicies aucta.*

5. *Auriculae non appendiculatae, vel omnes evolutae vel nonnullae cucullatae aut parvae conicae.*

217. FRULLANIA GRANDISTIPULA LINDBG. *Syn. Hep.* p. 450. Caule repente flexuoso simpliciter pinnato; ramis inaequalibus; foliis adproximatis oblique subrotundis integerrimis subhyalinis, auriculis cucullatis galeatove-conicis, caulinis tectis, rameis subdenudatis; amphigastriis magnis rotundis subtransversis; caulinis margine subangulatis planis adpressis lunatim emarginatis, laciniis conniventibus acutis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH.

II. Auriculae oblongo-cylindricae vel clavatae.

1.) *Secundiflorae. Fructibus secundis, auriculis replicatis, in paucis erectis parallelis.*

a. Amphigastriis integris.

218. FRULLANIA INTEGRISTIPULA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 451. Tetragyna; caule diviso pinnatim ramoso; ramulis recurvis attenuatis; foliis imbricatis orbiculatis obtusis convexis integerrimis, auricula minuta clavata reflexa tecta, maculis tumidulis ambitu crenata; amphigastriis imbricatis ovatis, medio plicatis obtusis integerrimis (in ramulo fructigero ad ultimum bifidis), margine reflexis; fructu laterali; foliis involucralibus longioribus, ventrem versus inflexis bilobis, lobis angustioribus, lobulo ventrali acutiori longiore; amphigastrio involucrali bifido, laciniis angustatis acutis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et Mb.

b. Amphigastriis emarginato-bifidis.

* Auriculis replicatis.

219. FRULLANIA FALLAX GOTTSCHE, *Syn. Hep.* p. 452. Tetragyna; caule diviso pinnatim ramoso; ramulis recurvis attenuatis; foliis imbricatis orbiculatis obtusis integerrimis, apice inflexis, auricula minuta clavata integerrima reflexa tecta; amphigastriis cordato-ovatis imbricatis retusis emarginato-bifidisque, medio plicatis, margine reflexis; fructu laterali. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH.

Specimina, quae coram habeo, recedunt a diagnosi foliis quibusdam acutis et auriculis ambitu crenatis.

220. FRULLANIA NODULOSA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 455. Tetragyna; caule repente pinnatim supradecomposito inaequali; foliis imbricatis orbiculatis obtusis, margine ventrali et apice deflexis integerrimis, auricula minuta replicato-conchaeformi; amphigastriis imbricatis orbiculatis emarginato-bifidis, basi utrinque late decurrentibus, medio gibbis, margine inflexis; fructibus in ramulis lateralibus subsecundis; auriculis amphigastrioque involucralibus serratis; perianthiis parvis, margine supero anguloso-scabris obovato-trigonis, mucronulo nullo vel brevissimo. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Prope Gadok. v. HALL in Herb. Dz. et Mb. ZOLLINGER, coll. n°. 1554.

221. FRULLANIA INTERMEDIA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 454. Caule pin-

natim composito; ramis recurvis; foliis imbricatis ovato-orbiculatis obtusis integerrimis, auricula parva clavata, foliorum inferiorum reflexa, superiorum erecta; amphigastriis adproximatis orbiculatis planis bidentatis integerrimis, rameis convexis, laciniis acuminatis inflexis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. ZOLLINGER, coll. n°. 444.

Specimina haecce, quae hujus loci censeo, foliis gaudent quibusdam apiculatis, auriculis crenulatis et amphigastriis plicatis.

An *Frullania integristipula* N. ab E., *F. fallax* GOTTSCHE et *F. intermedia* N. ab E. specifice diversae sunt? Perianthia nostris quoque deficiunt.

* * Auriculis erectis cauli parallelis.

222. FRULLANIA RECURVATA L. et LDBG. in LEHM. *Pugill. Pl.* VII. p. 12. ♂. Caule procumbente pinnatim composito decompositoque rigido; ramulis patenti-recurvis, apice radicantibus; foliis arcte imbricatis late ovatis obtusis integerrimis, basi sinuatim-productis, auricula parva oblonga cauli contigua tecta; amphigastriis imbricatis orbiculatis anguste bifidis, laciniis brevibus acutis; fructu . . . *Syn. Hep.* p. 456.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

2.) *Fructibus sparsis.*

A. Tamariscineae, foliis linea moniliformi notatis.

223. FRULLANIA MONILIATA N. ab. E. *Syn. Hep.* p. 440. Digyna; caule procumbente subpinnatim ramoso; foliis horizontalibus imbricatis ovatis mucronulatis integerrimis, linea media moniliformi notatis, auriculis oblongis explicatisve lanceolato-canaliculatis, stylo vel lobulo fornicato interjecto; amphigastriis distantibus ovato-rotundis patulis, margine superne subreflexis, ad $\frac{1}{4}$ partem bifidis, sinu obtuso; involucro serrato; perianthiis oblongis, dorso sulcatis, ventre unicarinatis laevibus. *Syn. Hep.* l. c.

β. Lobo folii involucralis dorsali minus serrato. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. TEYSM., ZOLLINGER in Herb. Dz. et MB. Herb. v. d. BOSCH. Herb. BUSE. — In monte Batu Lanté insulae Sumbawa, altit. ± 4500′. ZOLLINGER, coll. sub. n°. 3400.

B. Textura foliorum conformi.

a. Auriculis e folii margine oriundis, recto angulo vel oblique a caule distantibus, lacinia parva interjecta.

224. FRULLANIA RAMULIGERA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 442. Caule

procumbente bipinnatim composito; ramulis brevibus creberrimis; foliis remotiusculis subamplexicaulibus orbiculatis convexis integerrimis, auriculis cylindricis remotis, ramulorum oblongis confertis, e margine folii oriundis, a caule oblique distantibus, plica indistincta vel lobulo minuto subuliformi interjecto, ambitu cellulis prominulis crenulatis; amphigastriis distantibus suborbiculatis bifidis integerrimis; involucro serrato; perianthiis obovato-pyriformibus quadrangularibus, dorso ventreque obtuse carinatis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

225. FRULLANIA REPANDISTIPULA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 422. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 11. Caule repente ramoso; ramis breviter pinnatis; foliis semiverticalibus ovatis, caulinis contiguis obtusis, ramulorum imbricatis acutiusculis, auriculis obovato-oblongis denudatis fortiter papillosis, lacinia parva interjecta, caulinis horizontalibus, ramulorum confertis subobliquis; amphigastriis obovato-cuneatis repandis bifidis, laciniis obtusiusculis, ramulorum imbricatis; fructu in ramulo brevi laterali; involucro subdentato; perianthio oblongo, dorso sulcato, ventre unicarinato, carina acuta.

Habitat Javam. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

Caulis ferrugineo-rufus, repens, 0,04 fere longus, 0,008 cum foliis latus, vage ramosus. Rami elongati, patentes, laxe pinnati; ramulis angustis, brevibus. Folia semiverticalia, ovata, integerrima, apice subinflexa; caulina contigua, obtusa, ramulorum minora, imbricata, subacuta; auriculae denudatae, oblongae vel subpyriformes, papillis conicis, obtusis, longis, obsitae; caulinae subhorizontales, ramulorum subobliquae, confertae, lacinia dentiformi interjecta. Textura e cellulis parvis, subrotundis. Amphigastria caule latiora, obovato-cuneata, ad medium bifida, laciniis obtusis vel acutiusculis, circumcirca repando-crenulata. Folia involucralia biloba, lobis acutis, apice denticulatis. Amphigastrium involucrale caulinis majus, profundius bifidum, laciniis acutis, denticulatis. Perianthium elliptico-oblongum, dorso sulcatum, ventre uni-carinatum, carina acuta. Spica mascula globosa.

Proxima *Frullaniae ramuligerae* N. ab E. Differt nostra foliis ovatis, ramulorum acutis, amphigastriis obovato-cuneatis, repando-crenulatis et perianthio.

TABULA XVI.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso, vicies aucta; f.* 3. *ramus a ventre, vicies auctus; f.* 4. *folium caulinum, quadragies auctum; f.* 5. *folium pinnulae, octogies auctum; f.* 6. *textura folii, centies aucta; f.* 7. *amphigastrium caulinum, octogies auctum; f.* 8. *perianthium cum foliis involucralibus, vicies aucta.*

226. FRULLANIA PINNULATA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Arch.* III. p. 425. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 11. Caule repente; ramis elongatis erectis subpinnatis, pinnis brevissimis microphyllis; foliis semiverticalibus imbricatis ovatis obtusis integerrimis, ramulorum acutis, auriculis cylindraceis papillosis denudatis, lacinia parva interjecta, caulinis subhorizontalibus, ramulorum obliquis confertis; amphigastriis obovatis integerrimis bifidis, ramulorum confertis oblongis, laciniis acutis; lobis ventralibus involucri amphigastrioque dentatis, dorsalibus subintegris acutis; perianthio oblongo, costa ventrali inflato-bicarinata.

Habitat Javam. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Herb. v. d. Bosch.

Planta subfusca, repens, ramulos arborum denso strato arcte includens. Caulis 0,035—0,05 longus, cum foliis 0,002 latus, ramosus. Rami patenti-erecti, subbipinnati; pinnulis brevibus, oblongis linearibusve sub foliis caulinis et ramorum fortiorum reconditis, aut iis vix sescuplo longioribus. Folia semiverticalia, adproximata et contigua, orbiculato-ovata, integerrima, obtusa, apice plana vel subinflexa; pinnularum minuta, imbricata, subacuta, auriculis prorsus obtecta. Textura foliorum e cellulis parvis, subrotundis; auriculae horizontales, cylindricae, verruculis obsessae; pinnularum obliquae, confertae, lacinia parva, styliformi interposita. Amphigastria obovato-cuneata, plana, integerrima vel extus prominentiá angulari praedita, ad medium bifida, laciniis obtusis vel acutis; pinnularum subimbricata, oblongo-cuneata, laciniis linearibus, obtusis vel lanceolatis. Fructus sessilis. Folia involucralia biloba; lobus dorsalis ovatus, acutus et cuspidatus, inflexus, subintegerrimus; ventralis lanceolatus, versus apicem dentatus. Amphigastrium involucrale bifidum, laciniis lineari-lanceolatis, dentatis. Perianthium obovato-oblongum, dorso sulcatum, ventre inflato-carinatum vel, carinâ in medio collabente, bicarinatum.

Statura robustiori, habitu alieno, auriculis cylindricis, amphigastriis integris et perianthio, a *Frullania repandistipula*, cui proxima, distat.

TABULA XVI.

Fig. 1. *Plantae magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso, decies aucta: f.* 3. *pars caulis cum pinnulis a ventre, decies aucta. f.* 4. *folium caulinum, vicies auctum: f.* 5. *textura folii, centies aucta; f.* 6. *amphigastrium caulinum, quinquagies auctum; f.* 7. *perianthium cum involucro et fructu a ventre, vicies aucta.*

227. FRULLANIA JUNGHUHNIANA Gottsche. *Syn. Hep.* p. 444. Caule repente pinnatim ramoso; ramis brevibus subdecurvis; foliis adproximatis, supremis imbricatis, subverticalibus orbiculatis obtusis, nonnullis ovatis, margine ventrali basi sinuatis et in laminam minutam triangularem complicatis, auricula clavato-cylindrica, margini folii oblique adnata; amphigastriis parvis ovatis,

basi decurrentibus, laciniis obtusiusculis foliisque involucralibus integerrimis; perianthiis oblongis dorso sulcatis, ventre acute unicarinatis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

228. FRULLANIA SINUATA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 424. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 11. Caule repente; ramulis regulariter subbipinnatis; foliis semi-subverticalibus, caulinis adproximatis obovato-rotundis, pinnarum minoribus imbricatis ovatis, apice obtuso acuto vel apiculato inflexis, ibidemque in dorso sinulo excavatis, lacinia parva interjecta, auriculis denudatis subobliquis oblongo-cylindricis, ramulorum confertis; amphigastriis distantibus ovatis bifidis, versus apicem angulato-repandis; amphigastriis ramulorum imbricatis, laciniis subcanaliculatis, apice incurvis; fructu subsessili; foliis involucralibus amphigastrioque bifidis, laciniis acutis serratis; perianthio oblongo, ventre unicarinato.

β. tenella. FRULLANIA TENELLA v. d. Sd. Lc. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 425. Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 11. Caule irregulariter pinnato composito; foliis aeque magnis adproximatis, apice planis, auriculis crassis obovatis laevibus aut papillosis, lacinia notabili triangulari-ovata interposita; amphigastriis involucroque integerrimis.

Habitat Javam. Var. *α.* Herb. Dz. et Mb. — Sumatram, in monte Lubu Radja. Herb. Jungh. Var. *β.* Iisdem in locis et Herbariis. Megalawangie, Herb. Jungh.

Planta gracilis, fusco-nigricans, humectata fusco-rubella, repens, 0,025 circiter longus, cum foliis 0,0008 latus, regulariter pinnatim ramosus, ramulis confertis iterum pinnulatis. Folia subverticalia, integerrima; caulina cauli incumbentia, semi-amplexantia, adproximata, orbiculato-obovata, basi ventrali sinulo excavata aut plana, apice sinuato-inflexa obtusa, vel acuta; pinnularum minora, dense imbricata, ovata, obtusa, acuta vel cuspidulata, apice inflexa et sub apice sinulo excavato notata; auriculae nudae, subobliquae, laeves, cylindricae et oblongo-cylindricae, lamina minutissima interposita. Textura foliorum e cellulis parvis, ovalibus, subflexuosis. Amphigastria caulina distantia, caule paulo latiora, adpressa, e basi subdecurrente subquadrato-ovata, margine subreflexa, versus apicem angulato-repanda, ante medium bifida, laciniis obtusis vel acutis; pinnularum imbricata, ovata, subrepanda vel integerrima, laciniis lanceolatis, canaliculatis, subincurvis. Fructus sessilis. Folia involucralia amphigastriumque bifida, laciniis acutis, serratis. Perianthium (apice mutilatum visum) oblongum, ventre unicarinatum. Spica mascula globosa. Gradatim nascitur:

β. tenella. Ramificatio irregularis. Folia minora, magnitudine aequalia, adproximata, ovata, subacuta; auriculae foliorum longitudinem saepe aequantes et iis dimidio angustiores, obovatae, crassae, laeves aut papillosae, lacinia magna, triangulari-ovata interposita. Amphigastria parva,

plana, ovata, bifida, laciniis obtusiusculis, integerrimis. Involucrum integerrimum. Spica mascula ovata vel oblonga, sicuti perianthia pro plantula magna. Textura foliorum paullo laxior.

Species pluribus formis ludens et hinc fallax. Num *Frullania Junghuhniana* GOTTSCHE, quam non vidi, hujus loci?

TABULA XVII.

Fig. 1. *Plantae magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis cum pinnulis a dorso, decies et quinquies aucta; f.* 3. *eadem a ventre, vicies et quinquies aucta; f.* 4. *pinnula, quinquagies aucta; f.* 5. *folium caulinum, tricies auctum; f.* 6. *folium pinnulae, nonagies auctum; f.* 7. *textura folii, centies et quinquagies aucta; f.* 8. *amphigastrium caulinum, septuagies et quinquies auctum.*

Var. β. tenella. *f.* 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso, quadragies aucta; f.* 3. *folium singulum, quinquagies auctum; f.* 4. *textura folii, ducenties aucta; f.* 5. *amphigastrium caulinum, septuagies et quinquies auctum; f.* 6. *ramus fructifer a ventre, vicies et quinquies auctus; f.* 7. *spica mascula, vicies et quinquies aucta; f.* 8. *folium perigoniale, quinquagies auctum; f.* 9. *folia auriculis papillosis, quadragies aucta.*

229. FRULLANIA TRICARINATA v. D. SD. LC. in DOZY *Plagiochila Sandei.* p. 10. Caule repente subbipinnato; foliis imbricatis semiverticalibus ovatis obtusis (superiorum quibusdam acutatis), auriculis oblongis laevibus obliquis, lacinia minuta aut nulla interposita; amphigastriis subdecurrentibus obovatis integerrimis, sinu brevi bifidis, ramulorum contiguis, ad medium bifidis, laciniis acutis; fructu laterali; foliis involucralibus ovatis acutis, apice subdentatis, lobi auricularis amphigastriique bifidi laciniis lanceolatis; perianthio oblongo, dorso sulcato, ventre tricarinato.

Habitat Javam. Herb. v. D. BOSCH.

Fusca, repens. Caulis 0,015 longus, cum foliis 0,001 latus, subbipinnatus; pinnulae confertae. Folia semiverticalia, imbricata, obtusa, integerrima; pinnularum minora, quaedem acuta; auriculae parvae, oblongae, laeves, obliquae, lacinia minuta aut nulla interposita. Rete foliorum densum; areolae parvae, subrotundae. Amphigastria caulina rotundo-obovata, subdecurrentia, integerrima vel obsolete angulata, breviter fissa, sinu laciniisque acutis; ramulorum minora, obovata, conferta, laciniis longioribus, magis angustatis. Fructus sessilis. Folia involucralia biloba; lobus dorsalis ovatus, acutus, apice inflexo, subdentato; ventralis lanceolatus, subintegerrimus. Amphigastrium involucrale majus, ovatum, profunde bifidum, laciniis lineari-lanceolatis, acuminatis, integerrimis. Perianthium oblongo-semicylindricum, dorso impressum, ventre tricarinatum.

Differt a *Frullania repandistipula*, cui affinis est, auriculis laevibus, amphigastriis latioribus, caulinis breviter fissis et perianthio.

TABULA XVIII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso, tricies aucta; f.* 3. *pars caulis cum pinnulis a ventre, vicies aucta; f.* 4. *folium singulum, sexagies auctum; f.* 5. *textura folii, centies et quinquagies aucta; f.* 6. *amphigastrium caulinum, sexagies auctum; f.* 7. *amphigastrium pinnulae, sexagies auctum; f.* 8. *folium involucrale, tricies auctum; f. perianthium et involucrum a ventre visa, tricies aucta; f.* 10. *perianthium a dorso, tricies auctum.*

b. Auriculis cauli parallelis et subcontiguis, rarius stylo subuliformi interjecto.

†. Foliis patenti-divergentibus. (Perianthia dorso sulcata, ventre unicarinata.)

230. FRULLANIA APICULATA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 452. Tetragyna; caule repente pinnatim ramoso; foliis imbricatis contiguisve ovatis integerrimis plerisque acute mucronatis, auriculis subcylindricis obliquis denudatis vel in lacinias explicatis; amphigastriis remotiusculis planis subrotundis acute bifidis integerrimis; fructibus in ramulis terminalibus fastigiatis; perianthiis oblongis prismatico-trigonis laevibus, dorso sulcatis, ventre unicarinatis; foliis involucralibus bilobis, lobulo dorsali ovato-lanceolato, lobulo ventrali lanceolato acuto amphigastrioque integerrimis. *Syn. Hep.* l. c.

β. *laxa;* foliis contiguis, apiculo validiore; ♂ amphigastriis latioribus; ramulis brevibus nodulosa. l. c.

γ. *obscura;* ramulorum foliis longe apiculatis; amphigastriis minoribus. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. α. Herb. JUNGH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Herb. v. D. BOSCH. Herb. BUSE. Var. β. Herb. JUNGH.

231. FRULLANIA MINOR v. D. SD. LC. in *Nederl. Kruidk. Archief.* III. p. 424. DOZY *Plagiochila Sandei.* p. 11. Caule repente pinnatim composito; foliis semiverticalibus rotundatis, pinnarum imbricatis late ovatis acutis, auriculis denudatis obliquis oblongis vel evolutis; amphigastriis distantibus planis acute bifidis, ramulorum confertis; fructibus sparsis subsessilibus; involucro inciso-dentato; foliis involucralibus bilobis, margine undulato-reflexis, lobo dorsali late ovato, ventrali lanceolato-ovato; perianthio obovato, dorso convexo, ventre unicarinato, carina lata obtusa.

Habitat Javam. Herb. JUNGH. Herb. v. D. BOSCH.

Fusco-nigricans, repens. Caulis circiter 0,015 longus, cum foliis 0,008 latus, pinnatim ramosus, compositus; ramulis confertis. Folia semiverticalia, ovata, integerrima; caulina et

ramorum fortiorum adproximata, obtusa; pinnularum minora, acuta, subinflexa; auriculae denudatae obliquae, laeves, oblongae: caulinae in lacinias lanceolatas, canaliculatas evolutae. Textura foliorum e cellulis mediocribus, subrotundis. Amphigastria ovata, plana, integerrima, bifida, laciniis acutis; caulina distantia; pinnularum subimbricata, minora. Fructus lateralis, sessilis. Folia involucralia biloba; lobus dorsalis late ovatus, acutus, subintegerrimus; ventralis ovato-lanceolatus, marginibus reflexis, undulatis, inciso-dentatis. Amphigastrium involucrale caulinis majus, profunde bifidum, laciniis lanceolatis, marginibus reflexo-undulatis, inciso-dentatis. Perianthium obovatum, dorso plano-convexum, ventre unicarinatum, carina lata, obtusa.

Differt a *Frullania apiculata* N. ab E. cui affinis est, ramificatione, fructibus sparsis, involucro inciso-dentato et perianthio breviore; a *Frullania gracili* N ab E. amphigastriis caulinis distantibus, foliis quibusdam acutis et perianthio obovato.

TABULA XVIII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali*; *f.* 2. *pars plantae a dorso visa, vicies aucta*; *f.* 3. *pars plantae a ventre visa, vicies aucta*; *f.* 4. *folium caulinum, quadragies auctum*; *f.* 5. *folium pinnae, quadragies auctum*; *f.* 6. *folium pinnulae, quadragies auctum* *f.* 7. *textura folii, centies et quinquagies aucta*; *f.* 8. *amphigastrium caulinum, quadragies auctum*; *f.* 9. *folium involucrale, vicies et quinquies auctum*; *f.* 10. *perianthium et folia involucralia a ventre visa, tricies aucta.*

252. FRULLANIA GRACILIS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 452. Caule repente pinnatim ramoso subbipinnato; foliis imbricatis orbiculatis obtusis integerrimis, auriculis obovatis obliquis denudatis; amphigastriis imbricatis planis subrotundis bifidis integerrimis, laciniis conniventibus; fructu in ramis brevibus terminali; foliis et amphigastriis involucralibus inciso-serratis; perianthiis trigonis prismaticis laevibus, dorso impresso, ventre unicarinato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

253. FRULLANIA HASKARLIANA Lindbg. *Syn. Hep.* p. 455. Caule inordinate bipinnato; ramis elongatis divaricatis, ramulis patenti-deflexis; foliis imbricatis oblique rotundo-ovatis deflexis obtusis, ramulorum nonnullis apiculatis, auriculis parvis oblongis cauli oblique subadproximatis, plerisque tectis; amphigastriis adproximatis rotundo-ovatis, margine incrassato-subreflexis, ad apicem planiusculis repando-crenulatis acute bifidis; foliis involucralibus amphigastrioque inciso-serratis; perianthio involucrum subaequante oblongo, dorso concavo, ventre unicarinato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Herb. Dz. et Mb.

254. FRULLANIA SERRATA Gottsche. *Syn. Hep.* p. 455. Tetragyna;

caule repente bipinnato pinnatim decompositove; foliis imbricatis ovatis, apice subinflexis longius apiculatis, auriculis oblongo-cylindricis elongatis, a caule lamina triangulari vel subuliformi interjecta distantibus tectis, ramulorum confertis denudatis; amphigastriis imbricatis cordato-rotundis magnis, margine reflexis bifidis, laciniis obtusis (in ramulis minoribus oblongis acute bifidis); perianthiis subsecundis pyriformibus, dorso impressis, ventre unicarinatis; foliis involucralibus amphigastrioque, margine varie incisis duplicatoque serratis. *Syn. Hep.* l. c.

β. *pertenuis;* caule ramosissimo; foliis pluribus obtusis; involucro perianthium subaequante; foliis involucralibus inciso-serratis, lacinulis longioribus subulatis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. α. Herb. Jungh. Herb. v. d. Bosch. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

255. FRULLANIA CORDISTIPULA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 454. Tetragyna; caule repente pinnatim ramoso, ramis horizontalibus iterum pinnatis; foliis imbricatis ovatis apice inflexis integerrimis apiculatis (ramulorum ovato-lanceolato-acuminatis), auriculis oblongis, stylo subulato interjecto a caule subdistantibus; amphigastriis imbricatis subrotundis integerrimis, sinu angusto ad medium fere bifidis, margine reflexis (rameis oblongioribus); perianthiis prismatico-triangularibus basi attenuatis dorso sulcatis, ventre unicarinatis; foliis amphigastrioque involucralibus inciso-serratis. *Syn. Hep.* l. c.

β. *mutica;* foliis involucralibus, aeque ac amphigastrio involucrali subintegerrimis, vel uno alterove dente tantum armatis. l. c.

γ. *regularis;* foliis laxius dispositis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. α. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Zollinger, coll. n°. 1745.

256. FRULLANIA NIGRICAULIS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 457. Caule procumbente subramoso elongato, ramis sparsis; foliis horizontalibus alternis subimbricatis cordato-orbiculatis obtusis integerrimis, auriculis cauli parallelis tectis parvis oblongo-subcylindricis, basi truncatis, stylo interjecto subulato; amphigastriis magnitudine foliorum, reniformi-orbiculatis emarginatis bifidisve, laciniis conniventibus remotiusculis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

257. FRULLANIA ORIENTALIS v. d. Sd. Lc. in Dozy *Plagiochila Sandei.* p. 10. Caule procumbente elongato pinnatim ramoso; foliis adproximatis semiverticalibus planis ovatis acutis integerrimis, ramulorum laxe imbricatis,

auriculis conicis cauli contiguis et parallelis tectis, amphigastriis adpressis cordato-ellipticis integerrimis bifidis, laciniis acutis; fructu in ramulis sessili; foliis involucralibus amphigastrioque bifidis, laciniis lanceolato-acuminatis integerrimis; perianthio . . .

Habitat Javam. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

Caulis procumbens, inferne denudatus, 0,15 longus, cum foliis 0,0025 latus, subbipinnatus; pinnis remotis, patenti-divergentibus. Folia caulina subhorizontalia, distantia, alterna, plana, ovata, acuta; ramulorum contigua; auriculae parvae, cauli contiguae, tectae, conico-cylindricae. Textura foliorum e cellulis parvis, rotundo-quadratis, limitibus flexuosis, subcontiguis. Amphigastria foliis parum minora; caulina distantia, adpressa, e basi cordata elliptica, integerrima, bifida, sinu laciniisque acutis; ramulorum contigua, minora. Fructus in ramulis lateralis, sessilis. Folia involucralia et amphigastrium bifida, laciniis aequalibus, lanceolatis, acuminatis, integerrimis.

Habitus *Frullaniae vaginatae* N. ab E. et *Frullaniae Ternatensis* GOTTSCHE, sed multo robustior, foliisque planis primo obtuitu distinguenda.

TABULA XIX.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *folia a dorso visa, decies et quinquies aucta; f.* 3. *pars caulis cum pinna a ventre, decies aucta; f.* 4. *folium singulum, tricies auctum*; *f.* 5. *textura folii, quinquagies aucta; f.* 6. *cellulae folii, centies et quinquagies auctae; f.* 7. *folium involucrale, quadragies auctum.*

† †. Foliis cauli circumvolutis.

258. FRULLANIA VAGINATA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 465. Tetragyna; caule procumbente alternatim subbipinnato divaricato; foliis semiverticalibus squarrosis oblique ovatis vel ovato-cordatis, margine dorsali grosse serratis acutis, auriculis minutis oblongis adproximatis parallelis; amphigastriis remotiusculis oblongis patulis acute bifidis, basi sinuato-subdentatis; foliis amphigastrioque involucralibus bifidis ciliato-serratis; perianthiis triquetris, dorso sulcatis, ventre unicarinatis. *Syn. Hep.* l. c.

β. nigricans; amphigastriis basi integerrimis. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Herb. v. D. BOSCH.

259. FRULLANIA TERNATENSIS GOTTSCHE. *Syn. Hep.* p. 465. Tetragyna; caule procumbente filiformi pinnatim ramoso; foliis imbricatis oblique ovatis, margine ventrali inflexis acutis et obtusis integerrimis, auriculis parvis oblongis cauli contiguis et parallelis tectis; amphigastriis oblongis bifidis, margine incrassato-subreflexis patulis; foliis amphigastrioque involucralibus

bilobis, lobis serrato-dentatis; perianthio semi-emerso oblongo prismatico triquetro, dorso convexiusculo, ventre acute unicarinato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Herb. v. d. Bosch. — Ternate. Syn. Hep. — Sumatram, in monte Lubu Radja. Herb. Jungh.

II. FRONDOSAE.

SUBTRIBUS 1.

DIPLOMITRIEAE ENDLICH.

XXVI. BLYTTIA ENDL.

240. BLYTTIA LYELLII Endl. *Syn. Hep.* p. 475. Fronde sessili oblonga linearive crenulata aut subserrata; involucri laciniis ciliato-laceris. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Zollinger. coll. n°. 1854. Sterilis in Herb. Dz. et Mb.

241. BLYTTIA RADICULOSA v. d. Sd. Lc. Fronde sessili lineari praelonga, margine undulata, integerrima, costa subtus tomentoso-radiculosa; involucro campanulato ciliato-lacero; perianthiis linearibus elongatis; calyptra inclusa.

Habitat Javam. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

Laxe caespitosa, intense viridis. Frons linearis, 0,055 longa, primaria 0,004 lata, simplex et parce dichotomo-divisa, divisionibus patentibus, nonnunquam e costa ventris innovationes divaricatas emittens; margines subundulati, integerrimi; apex latus, obtusus vel sensim angustatus; costa crassa, subtus tomentoso-radiculosa, radiculis ferrugineo-fuscis. Textura foliorum e cellulis sexangulari-ovalibus et subrotundis, limitibus contiguis. Fructus crebri in eadem fronde, dorso medio dispositi. Involucrum campanulatum, margine ciliato-lacero. Perianthium angustum, lineari-cylindricum, 0,008 longum, ore denticulato; calyptra inclusa. Planta mascula deest.

Affinis *Blyttiae Lyellii* Var. *Hibernicae* N. ab E. et *Blyttiae crispatae* N. ab E. Ab utraque diversa fronde integerrima, costa subtus tomentosa et perianthio longissimo.

242. BLYTTIA PHYLLANTHUS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 478. Frondibus in rhizomate repente filiformi stipitatis oblongo-lanceolatis simplicibus obtusis integerrimis; fructu e dorso frondis basin versus oriente; involucro multifido, laciniis dentatis imbricatis; perianthio involucro multo longiori; calyptra inclusa subechinata. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Herb. Dz. et Mb.

SUBTRIBUS 2.

HAPLOLAENEAE N. ab E.

XXVII. SYMPHYOGYNA. M. et N.

243. SYMPHYOGYNA PODOPHYLLA M. et N. *Syn. Hep.* p. 481. Rhizomate repente filiformi ramoso; frondibus erectis bis bifidis nervosis, laciniis subpetiolatis, margine integris planis subserratis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Herb. Junghi. Teysm. in Herb. Dz. et Mb. In monte Pangerango. Zollinger, coll. n°. 2129.

244.? SYMPHYOGYNA ULVOIDES N. ab E. *Syn. Hep.* p. 487. Fronde parva lineari-dichotoma pellucida costata marginata spinoso-dentata purpurea; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

XXVIII. BLASIA MICH.

245. BLASIA JAVANICA v. d. Sd. Lc. Fronde obovato-cuneata sinuato-lobata undulata, subtus tota fere superficie dense radiculosa, costa effusa; sacco gemmifero conico-elongato, e tubo brevi receptaculi longe emergente.

Habitat Javam. Holle in Herb. Dz. et Mb.

Frondes obovato-cuneatae, in rosulas obscure virides, 0,025 diametri, radiatim expansae; ambitus sinuato-lobatus et undulatus, subadscendens; costa effusa et reliqua superficies inferior, apice excepto, radiculis densis, brevibus, fuscis obsessa. Textura frondis e cellulis hexagono-rotundis, subdiscretis, apicalibus minoribus. Receptacula intra frondis parenchyma gemina vel solitaria, extra frondem tubo viridi, brevi, adscendente terminata, extus squamulis foliaceis obsesso. Superficies interna receptaculi et tubi (excretorium quem vocant) membrana vestitur, saccum efformante, statu juvenili ovoideum, progrediente aetate in formam coni e tubo lacero longe emergentem. Saccus iste gemmifer fronde pallidior est et pellucidus laxiusque reticulatus, e cellulis majoribus, elongatis, discretis constans; apex pertusus, quo gemmae sacco contentae foras propellantur. Gemmae compactae, flavescentes, minus polyedrae et minores, quam *Blasiae pusillae* Linn. Reliqua non visa.

A *Blasia pusilla* Linn. adparatu gemmifero valde distincta species.

Planta memorabilis, quae genus *Blasiam* in regionibus tropicis repraesentat, antea Europae solum et Americae boreali proprium habitum.

TABULA XIX.

Fig. 1. *Planta in rosulam expansa, magnitudine naturali; f.* 2. *frons a dorso, sexies aucta; f.* 3. *eadem a ventre visa, sexies aucta; f.* 4. *textura frondis* Blasiae javanicae, *centies aucta; f.* 5. *textura frondis* Blasiae pusillae, *centies aucta; f.* 6. *tubus excretorius cum sacco gemmifero, vicies auctus; f.* 7. *tubus excretorius dorso lacerus, vicies auctus; f.* 8. *pars sacci gemmiferi, tricies aucta; f.* 9. *textura sacci gemmiferi, ducenties aucta; f.* 10. *sectio transversa frondis, ut saccus gemmiferus, receptaculum investiens, in conspectum prodeat; f.* 11. *gemmae* Blasiae Javanicae; *f.* 12. *eaedem* Blasiae pusillae, *centies auctae.*

SUBTRIBUS 3.

ANEUREAE N. ab E.

XXIX. ANEURA DUM.

246. ANEURA PINGUIS Dumort. N. ab E. *Hep. Eur.* III. p. 427. Lacero-divisa aut simplex radiculosa sublinearis, marginibus aut lobulatis undulatisque aut denticulatis; calyptra laevi puberula. *Syn. Hep.* p. 495.

Habitat Javam. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

Specimina Javanica pertinent ad Var. α. 3. *tenuem* N. ab E. et colore et textura Europaeis sunt similia. Alia specimina ejusdem herbarii sunt fusco-nigricantia, coriacea, densissime radiculosa, radiculis rufis; calyptra strigosa. Propria species videtur.

247. ANEURA PINNATIFIDA N. ab E. *Hep. Eur.* III. p. 442. Pinnatim divisa aut subsimplex, plana aut subcanaliculata, subtus convexula; ramis horizontalibus, apice (angustissimas formas, si excipis) latioribus bipinnatifidis dentatisve obtusis; calyptra laevi puberula. *Syn. Hep.* p. 495.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Herb. Miq. Dz. et Mb. v. d. Bosch.

Referenda sunt ad Formam α. 1. α. *nigricantem* N. ab E.

248. ANEURA MULTIFIDA Dum. *Comm. Bot.* p. 115. Pinnatim multifida decomposita et supradecomposita; trunco primario biconvexo rigidulo; ramis horizontalibus, ramulis pectinatim pinnatis, lacinulis lineari-angustissimis; innovationum tenuioribus linearibus obtusis; fructu in trunco ramisque laterali; involucro turbinato carnoso; calyptra tuberculata. *Syn. Hep.* p. 496.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh.

249.? ANEURA CANALICULATA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 500. Fronde procumbente undulata laciniato-pinnatifida, laciniis linearibus truncatis convoluto-canaliculatis; fructu . . . *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

SUBTRIBUS 4.

METZGERIEAE N. AB E.

XXX. METZGERIA RADDI.

250. METZGERIA FURCATA N. ab E. *Hep. Eur.* III. p. 485. Furcatim prolifero-divisa linearis glabra, margine costaque subtus setulosis nudisve. *Syn. Hep.* p. 502.

α. extensa; major, parce furcatim divisa, laciniis elongatis, inferne subsimplex aut alternatim ramosa. l. c.

β. communis; furcatim subalternatimve divisa, laciniis brevibus obtusissimis. l. c.

1. *major;* uncialis et major; subfastigiatim aequiterque furcata. l. c.

2. *minor;* confertius divisa, laciniis aliis furcatis, aliis simplicibus. l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. Herb. Dz. et MB., ZOLLINGER.

251. METZGERIA FUCOIDES M. et N. in D'ORBIGNY. *Voyage.* p. 60. Pinnatim divisa; caudice compresso glabro adscendente; pinnis alternis suboppositisve palmatifido-pinnatifidis bipinnatifidisve, lacinulis linearibus obtusis glabris costatis; calyptra subaxillari cylindracea glabra. *Syn. Hep.* p. 506.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. Herb. Dz. et MB. In monte Salak. ZOLLINGER, coll. n°. 816 Z. ex p.

Inflorescentia mascula hujus speciei eadem, ac *Metzgeriae eriocaulae* HOOK. Antheridia nempe in lacinulis frondium propriis, utrinsecus costam a tergo sunt immersa. Folia perigonialia nulla.

Metzgeriae species, quae sub §. 2. in *Synopsi Hepaticarum* describuntur, praeter inflorescentiam masculinam etiam habitu, compage, calyptrae situ, caet. a *Metzgeriis* §. 1. l. c. ita recedunt, ut characteres sufficientes largiantur, quibus illae separari et proprium genus alius familiae constituere possent.

TRIBUS II.

MONOCLEAE. N. AB E.

XXXI. CALOBRYUM N. AB E.

252. CALOBRYUM BLUMII N. ab E. *Syn. Hep.* p. 507. Foliis obovatis integerrimis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

TRIBUS III.

MARCHANTIEAE. N. AB E.

XXXII. MARCHANTIA LINN.

§. 1. *Stellatae.* Pedunculo femineo centrali. Receptaculo in plerisque radiato (masculo peltato).

253. MARCHANTIA POLYMORPHA Linn. *Hep. Eur.* IV. p. 61. Receptaculis femineis stellatis, radiis teretibus; involucris contiguis pleiocarpis, margine laciniis obtusis ciliato-dentatis fimbriatis; fronde dichotomo-lobata canaliculata, subtus plicato-venulosa squamulosaque. *Syn. Hep.* p. 522.

Habitat Javam. Syn. Hep.

Pertinent specimina ad Formam α. 2. (*communem denticulatam* N. ab E.)

Speciem *Marchantiae tabulari* N. ab E. affinem at incompletam, in monte Pangerango Javae insulae, legit Zollinger. Coll. n°. 1943.

§. 2. *Chlamydium.* Cda. Pedunculo communi vel excentrico vel laterali (receptaculo masculo in nonnullis palmatilobo vel palmatifido.).

254. MARCHANTIA EMARGINATA N. ab E. R. et Bl. *Hep. Jav.* in *Nov. Act. Nat. Cur.* XII. p. 192 et 409. Receptaculo femineo dimidiato masculoque palmato-radiatis, radiis feminei 7 distantibus, apice dilatatis mar-

13

ginatis, masculi 5 integris; fructuum involucris margine crenulato-denticulatis; fronde lato-lineari obtusa bifida dichotomaque. *Syn. Hep.* p. 528.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Holle, Teysm. in Herb. Dz. et Mb. Buitenzorg, Herb. Miq.

255. MARCHANTIA PALMATA N. ab E. R. et Bl. *Hep. Jav.* in *Nov. Act. Nat. Cur.* XII. p. 193. Receptaculo femineo dimidiato septemfido-palmato, radiis distantibus, basi attenuatis, apice dilatatis retusis emarginatisve, masculis semicircularibus acute decem-(11-) lobis; fronde lineari-dichotoma, subtus ad costam squamosa, squamis suborbiculatis obtusis pallidis. *Syn. Hep.* p. 529.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. In prov. Bandong, Zollinger, coll. n°. 1805. Buitenzorg, Herb. Miq.

256. MARCHANTIA NITIDA L. et Ldbg. in Lehm. *Pug. Pl.* IV. p. 11. Receptaculo femineo excentrico 8—10-radiato convexo papillato, radiis subcontiguis, extrorsum dilatatis explanatisque imberbibus, superne costatis; involucris margine laciniato-ciliatis (ciliis purpurascentibus); pedunculo basi paleis stipato; fronde lineari- dichotoma viridi. *Syn. Hep.* p. 532.

Habitat Javam. Teysm. in Herb. Dz. et Mb.

Exemplaria nostra ambigua. Receptacula feminea (juvenilia tantum visa) *Marchantiae nitidae* L. et Ldbg., frondis autem forma et compages *Marchantiae squamosae* Radd. magis congruunt. Receptacula masculina in diversa planta, pedicellata, peltata, octo-loba. Scyphi pateriformes, limbo dentato, dentibus dentato-ciliatis.

257. MARCHANTIA GEMINATA N. ab E. R. et Bl. *Hep. Jav.* in *Nov. Act. Nat. Cur.* XII. p. 194. Receptaculo femineo dimidiato umbonato, basi prolixe barbato quadrifido, radiis oblongis apice sulcato-subbifidis, juvenilibus inflexis, adultioribus plerumque palmatim explanatis et divergentibus; involucris tubulosis, ore apicali crenulato-denticulatis; pedunculis terminalibus geminis pilosis; fronde lineari dichotoma, supra canaliculata. *Syn. Hep.* p. 534.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. Jungh. Buitenzorg, Herb. Miq. Herb. Dz. et Mb. Gadok, v. Hall in Herb. Dz. et Mb.

XXXIII. DUMORTIERA R., BL. ET N. AB E.

258. DUMORTIERA HIRSUTA R. Bl. et N. *Hep. Jav.* in *Nov. Act. Nat. Cur.* XII. p. 410. Receptaculo femineo (polycarpo) convexo setulis insperso, margine involucrisque hirsutissimis, subtus circa pedunculum barbato; fronde dichotoma crenulato-undulata, subtus hirsuta. *Syn. Hep.* p. 545.

α. latior; fronde apice dilatata, 4—6 lin. lata dichotoma continua; receptaculo setuloso. l. c.

Habitat Javam (Var. *α.*). Syn. Hep. In montibus Slamat, Ungarang. Herb. JUNGH. Buitenzorg, Herb. MIQ. Gadok, v. HALL in Herb. Dz. et MB. HOLLE, TEYSM. in Herb. Dz. et MB. Bogor, ZOLLINGER, coll. n°. 5477. — Sumatram in regione Battarum, Angkola superiore. Herb. JUNGH.

Nomen Javanicum *Lumut Kalie.*

XXXIV. REBOULIA N. AB E.

259. REBOULIA JAVANICA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 549. Frondibus dichotomis longo tractu continuis, articulationibus raris, extremitatibus bifidis saepe canaliculato-convolutis, supra viridibus, subtus purpureis; receptaculorum barba angusta. *Syn. Hep.* l. c.

β. angustior; frondibus longioribus, totis fere convolutis (♂.).

Habitat Javam. Syn. Hep. Var. *α.* In monte Ungarang (Medinie), alt. 3000′—5000′, m. April.—Jun. Herb. JUNGH.

Nomen Javanicum *Djen Gotjongot.*

XXXV. FIMBRIARIA N. AB E.

260. FIMBRIARIA BLUMEANA N. ab E. *Syn. Hep.* p. 564. Fronde lineari-angusta, apice bilobo crenulata, subtus purpurea; pedunculo glabro; receptaculo femineo convexo subumbonato papillato-tuberculoso, subtus nudo, margine loborum papilloso-crenulato non attenuato; perianthiis oblongis 8–12-fidis, laciniis planis strictis. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. In casuarinetis M. Idjeng. ZOLLINGER, coll. n°. 2843. (ex parte?).

261. FIMBRIARIA VENOSA L. et LDBG. in LEHM. *Pug. Pl.* IV. p. 29. Fronde obovata oblongave biloba tenerrima venosa; pedunculo glabro; receptaculo femineo convexiusculo crenulato, subtus breviter barbato; perianthio conico longe lateque rimoso, disci marginem haud longe superante. *Syn. Hep.* p. 570.

Habitat Javam. Ad terram in casuarinetis Javae orientalis. ZOLLINGER, coll. n°. 2843 et *System. Verzeichn.* I. p. 18. (ex parte?).

Specimina Zollingeriana, hoc numero et nomine autographo insignita et obvia in herb. V. D. BOSCH, absque dubio ad praecedentem speciem pertinent. An forte sub eodem numero duae caeque diversae species sunt distributae?

TRIBUS IV.

ANTHOCEROTEAE. N. AB E.

XXXVI. DENDROCEROS N. AB E.

262. DENDROCEROS JAVANICUS N. ab E. *Syn. Hep.* p. 582. Fronde costata dichotoma, laciniis pinnatifido-lobatis, lobis rotundatis undulato-crispis; calyce dimidiato. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep. Herb. JUNGH. Buitenzorg, Herb. MIQ. Herb. v. D. BOSCH. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

XXXVII. ANTHOCEROS MICH.

263. ANTHOCEROS GLANDULOSUS L. et LDBG. in LEHM. *Pug. Pl.* IV. p. 26. Fronde inciso-lobata lineari-latiuscula pulvinatim conferta, supra margineque vesiculoso-papulosa, verruculis simplicibus ramosisve turbinatis; involucro cylindrico papuloso-muricato. *Syn. Hep.* p. 585.

Habitat Javam. Syn. Hep. TEYSM. in Herb. Dz. et MB.

264. ANTHOCEROS LAEVIS LINN. *Spec. Pl.* II. p. 1606. Fronde enervi plana subradiatim dissecta crenata laeviuscula; involucro cylindrico, ore oblique truncato late scarioso. *Syn. Hep.* p. 586.

Habitat Javam. ZOLLINGER, coll. n°. 1605 et 2310. (*System. Verzeichn.* I. p. 18.)

265. ANTHOCEROS FALSINERVIUS LINDBG. in MEISSN. *Hep. Jav.* in *Bot. Zeitung.* VI. 1848. p. 463. ZOLLINGER *System. Verzeichn.* I. p. 18. Fronde obovato-lineari venosa pinnatifida incisa, venis in media fronde condensatis nervum mentientibus; involucro tubuloso, apice subbifido; capsula involucrum longe excedente. LDBG. l. c.

β. *lyratus;* major, lobulis minus venosis. GOTTSCHE in *Natuurk. Tijdschr. v. Nederl. Indië.* 1855. p. 575.

Habitat Javam. ZOLLINGER, coll. n°. 2310. Var. β. Eadem coll. n°. 3505. X.

TRIBUS V.

RICCIEAE. LINDBG.

XXXVIII. RICCIA MICH.

266. RICCIA BILLARDIERII M. et N. *Syn. Hep.* p. 602. Fronde simplici bifidave lineari serpentina profunde angusteque canaliculata, apice emarginato-bifida, margine membranaceo subhorizontali repando-undulato, subtus nigro-violaceo. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

267. RICCIA JUNGHUHNIANA N. ab E. et Ldbg. *Syn. Hep.* p. 609. Fronde apicem versus cavernosa carnosa, margine membranacea dichotoma sulcata viridi, laciniis linearibus, apice dilatato subemarginatis, subtus obsolete purpurascentibus. *Syn. Hep.* l. c.

Habitat Javam. Syn. Hep.

Conspectum tradere nisus sum Muscorum Hepaticorum Florae Javanicae, quotquot in diversis scriptis herbariisque, quae praesto erant, inveniuntur. Ast vero terra Javanica cum insulis circumjectis, innumeras plantas et formas alit hujus familiae, nondum descriptas ac prorsus ignotas. Nam Florae hujus cognitio, licet operibus Naturae scrutatorum in dies paene increscat et magis magisque perficiatur, multum tamen etiamnunc restabit operis et scrutationis.

De cryptogamis, in aliis orbis terrarum regionibus adhuc latitantibus, praefati sunt Viri Doct. Dozy et Molkenboer in Prodromo Florae Bryologicae Surinamensis: *quidquid Muscorum frondosorum, Hepaticorum, Lichenum,*

Fungorum et Algarum in regionibus extra-Europaeanis collectum sit, id ne millesimam forsitan partem efficit cryptogamorum, quae istae regiones proferunt. Et nimirum, quod attinet Hepaticas, ulteriorem Archipelagi Indiae orientalis indagationem, eximia scientiae augmenta esse adlaturam, jam potest intelligi e speciminibus Javae pluribus mancis et frustulis, quae continent herbaria, singulorum quorum expositio futilis, quin temeraria foret. Haec itaque silentio praeterire cogor atque sepono.

MANTISSA.

HEPATICARUM SPECIES QUAEDAM NOVAE, EXTRA FLORAE JAVANICAE DITIONEM LECTAE.

I. PLAGIOCHILA NEES ET MONT.

1. PLAGIOCHILA SURINAMENSIS MOLKB. *Mspt.* Caule repente; ramis adscendentibus innovando-ramosis; foliis dissitiusculis semi- subverticalibus ovatis subobovatisque, margine dorsali reflexis integerrimis, ventrali apiceque obtuso vel acutiusculo eroso-dentatis; fructu terminali et laterali; perianthio ovato, ore compresso truncato ciliato, ciliis noduloso-articulatis.

Habitat Surinamum, in consortio *Plagiochilae Miquelianae* LDBG. Herb. Dz. et MB.

Caespites crocco-rubelli. Caulis repens. Rami circiter 0,03 longi, cum foliis 0,003 lati, adscendentes, imprimis sub involucro, innovando-ramosi; ramuli patenti-divergentes, subcurvati. Folia adproximata, in ramulis dissitiuscula, semi-subverticalia, ovata et obovata; margo dorsalis reflexus, integerrimus, in caulem vix decurrens; ventralis apiceque obtuso, rarius acutiusculo, croso-dentatus, dentibus truncatis et quasi diruptis. Compages foliorum fragilis; cellulae parvae, ovali-rotundae. Fructus terminalis et lateralis. Folia involucralia utplurimum longius dentata, subciliata, acutiuscula. Perianthium ovatum, ore compresso, truncato, ciliato, ciliis longis, flaccidulis, noduloso-articulatis.

A *Plagiochila Miqueliana* LDBG. et affinibus, foliis erosis et perianthio distat.

TABULA XX.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *folia a dorso visa, vicies aucta; f.* 3. *folia a ventre visa, vicies aucta; f.* 4. *textura folii, centies aucta; f.* 5. *folium involucrale, vicies auctum; f.* 6. *perianthium, vicies auctum; f.* 7. *cilium perianthii, centies auctum.*

2. PLAGIOCHILA DREPANOPHYLLA v. D. SD. LC. Caule repente; ramis erectis divaricato-ramosis; foliis basi imbricatis semiverticalibus patenti-diver-

gentibus e basi ovata lanceolatis longe decurrentibus, margine dorsali arcuatis reflexis integerrimis, ventrali rectiusculis parce spinuloso-dentatis, basi integerrimis subreflexis, apice angustato in lacinias 2—3 ciliiformes fissas; fructu terminali et laterali; perianthio ovato-semigloboso truncato subbipartito, ore ventreque inciso-ciliato.

Habitat insulam Borboniae. Herb. v. d. Bosch.

Caulis repens. Rami erecti, 0,03 longi, cum foliis 0,0038 lati, versus apicem imprimis divaricato-ramosi. Folia laxe imbricata, apice libera, semiverticalia, patenti-divergentia, e basi ovata lanceolata; margo dorsalis longe decurrens, arcuatus, reflexus, integerrimus; ventralis paulo rotundatus, hic illic denticulo spinaeformi parce armatus, basi subintegerrima reflexus; apex angustior, fissus in lacinias 2—3 ciliiformes, rectas vel subflexuosas et divergentes. Textura foliorum e cellulis ovalibus, subcontiguis. Fructus terminalis et lateralis. Folia involucralia margine ventrali toto spinulosa. Perianthium ovato-globosum, ore truncatum, margine dorsali bifidum, integrum; ventrali bipartitum, aeque ac os ciliatum. Pistillidia 12—16.

Proximae sunt *Plagiochila gymnocalycina* M. et N. et *Plagiochila bursata* Ldbg.; ab utraque discernitur foliis lanceolatis, longe decurrentibus et perianthio.

Suppar est perianthii conformatio *Plagiochilae parvifoliae* Ldbg.

TABULA XX.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars plantae a dorso visa, decies aucta; f.* 3. *pars rami a ventre visa, decies aucta; f.* 4. *textura folii, centies aucta; f.* 5. *perianthium, a dorso apertum, cum pistillidiis, vicies aucta.*

II. MASTIGOBRYUM N. ab E., LDBG. et G.

5. MASTIGOBRYUM VENEZUELANUM Molkb. *Mspt.* Caule procumbente dichotomo; flagellis crebris subramosis; foliis imbricatis ovato-oblongis, basi convexiusculis, apice rotundato tridenticulatis, dentibus acutis integerrimis brevibus, subobsoletis aut nullis; amphigastriis imbricatis planis quadratis subtransversisque integerrimis vel apice rarius tricrenatis; perianthiis ovato-cylindricis, apice attenuatis plicatis, ore inciso-dentato.

Habitat Venezuelam. Herb. Dz. et Mb. Communicatum a Viro Nob. van Lansberge.

Caulis rigidulus, procumbens, 0,05 longus, cum foliis 0,004 latus, dichotomus; rami patentes, obtusi. Flagella crebra, crassiuscula, simplicia vel ramosa et apice radicantia, foliis et amphigastriis parvis vestita. Folia subhorizontalia, imbricata, explanata, patentia et patenti-diver-

gentia, planiuscula, ovato-oblonga, integerrima; margo dorsalis rotundatus; ventralis subrectus, basi paulisper dilatatus; apex rotundatus, integerrimus vel repando-tridenticulatus, vel dentibus majoribus munitus, e basi lata brevibus, acutis, integerrimis. Amphigastria caule duplo latiora, imbricata, plana, quadrata, quandoque latiora, quam longa, integerrima vel quaedam apice tricrenata. Textura foliorum cellulas exhibet parvas, ovali-rotundas; amphigastriorum laxiores et magis pellucidas. Fructus subseriati. Folia involucralia ovata; exteriora obtusa, integerrima; interiora longiora, acuta, versus apicem denticulata. Perianthium ovato-cylindricum, versus apicem attenuatum, plicatum, ore inciso-dentato, fisso, dentibus subtilissime denticulatis.

Mastigobryum Breutelianum Ldbg. et Gottsche proximum, differt foliis convexis, apice eroso-tridenticulatis dentibusque subcrenulatis, amphigastriis crenatis, quorum in planta nostra plurima sunt integra.

TABULA XXI.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso visa, decies aucta; f.* 3. *ramus fructifer a ventre visus, septies auctus; f.* 4. *folium singulum, quindecies auctum; f.* 5. *textura folii, octogies aucta; f.* 6. *a et b. amphigastria, vicies aucta; f.* 7. *textura amphigastrii, octogies aucta; f.* 8. *flos femineus, decies auctus; f.* 9. *folium involucrale internum, vicies auctum; f.* 10. *perianthium cum involucro, decies aucta.*

III. MADOTHECA DUMORT.

1. MADOTHECA JAPONICA v. d. Sd. Lc. Caule repente; ramis inordinate dichotomo-pinnatis compositis; foliis imbricatis ovatis obtusis, apice 2—4 dentatis, lobulis ligulatis planis obtusis integerrimis dentatisve vel apice solo subdentatis, basi raro caudatis; amphigastriis ovato-linguaeformibus planis obtusis denticulato-ciliatis vel subintegerrimis et apice solo bidentatis; fructu laterali; foliis involucralibus bilobis, lobis ovatis acutis, margine dorsali et ventrali dentato-spinosis; perianthio...

Habitat Japoniam, cum *Frullania Tamarisci* N. ab E., *Frullania Hutchinsiae* Var. β N. ab E. et *Chiloscypho arguto* N. ab E. Herb. Dz. et Mb.

Planta quibuslibet partibus in eodem specimine admodum polymorpha. Caulis repens, basi aphyllus, 0,05 circiter longus, cum foliis 0,003 latus, irregulariter dichotomo-pinnatus, compositus. Ramuli terminales patentes, breves, obtusi. Folia explanata, horizontalia, imbricata, ovata, plana; margo ventralis subrectus; dorsalis arcuatus; apex ob dentem unicum acutus, obtusus, integerrimus, repando-dentatus vel plerumque 2—4 dentatus. Lobulus planus, ligula-

tus, acutus vel obtusus, basi rarius caudatus, integerrimus vel repando-dentatus ciliatusque; apex integerrimus, obtusus vel bidentatus. Textura foliorum e cellulis parvis, rotundis, contiguis. Amphigastria plana vel medio gibba, imbricata vel remota, subdecurrentia, ovata, ovato-triangularia vel linguaeformia; apice obtusa, integerrima vel uni- bi- pluri-dentata aut bicuspidata; margines vel integerrimi vel repando-dentati et dentato-ciliati. Fructus in ramulo brevi lateralis. Folia involucralia biloba, ovata, acuta, margine utroque dentata aut ciliata; ventralis minor, quandoque obtusus. Amphigastrium involucrale ovatum, subdentatum, apice cuspidato bidentatum.

Affinis *Madothecae nilgherriensi* Mont. Recedit vero ramificatione et foliis magis dentatis.

TABULA XXI.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso visa, quindecies aucta; f.* 3. *ramus florifer a ventre visus, decies auctus; f.* 4. *folium singulum, vicies auctum; f.* 5. *textura folii, septuagies et quinquies aucta; f.* 6. *a, b, c. amphigastria varia, quinquagies aucta; f.* 7. *involucrum, vicies auctum; f.* 8. *amphigastrium involucrale, quinquagies auctum; f.* 9. *folium involucrale cum pistillidiis, quadragies aucta.*

IV. LEJEUNIA GOTTSCHE et LINDBG.

5. LEJEUNIA MUCRONATA v. d. Sd. Lc. Caule repente vage pinnatimque ramoso, foliis imbricatis ovatis, dorso areolis protuberantibus tuberculosis, marginibus denticulatis, apice mucrone piliformi subincurvo praeditis, basi sinuato-complicatis, lobulo tumido ovato, apice emarginato-unidentato; amphigastriis distantibus ovatis denticulato-ciliatisque, ultra medium bifidis, sinu obtuso, laciniis lanceolatis acuminatis rectis; fructu laterali sessili; foliis involucralibus margine dorsali spinuloso-ciliatis; perianthio obcordato compresso, ventre carinato-convexo, apice ciliato.

Habitat Venezuelam. In Hepaticis repentem legit Doct. Korthals. Herb. Dz. et Mb. In plantis Venezuelanis coll. Funck et Schlim sub n°. 260, cum perianthiis in Herb. v. d. Bosch.

Viridula, repens, vage pinnatimque ramosa, ramulis inaequalibus, patentibus, 0,002—0,003 longa. Caulis cum foliis 0,0005 latus. Folia semiverticalia, magis minusve imbricata, patentia, convexiuscula, ovata, acuta et orbiculato-ovata, apice mucrone piliformi, subincurvo terminata; margo totus ob cellulas eminentes, conicas, alias breviores alias longiores, denticulatus ciliatusque, basi sinuato-complicatus; lobulus ovatus, inflatus, apice emarginato-unidentatus; folia

in ramorum apice plica saepe parva aut nulla instructa. Textura foliorum densa, e cellulis minutis, subrotundis, contiguis, circum lobulum majoribus et planis; in dorso folii et lobuli prominentibus, quasi tuberculatis. Prominentiae istae in amphigastriis minus conspicuae, in perianthiis deficere videntur. Amphigastria distantia, adpressa, plana, ovata, marginibus denticulatis, ciliis hic illic interjectis; sinus latus, obtusus, ultra medium bifidus, laciniis lanceolatis, acuminatis, rectis. Fructus lateralis, sessilis. Folia involucralia biloba; lobus dorsalis spinuloso-ciliatus; ventralis planus, quadrato-ovatus, obtusus. Amphigastrium involucrale caulinis majus, brevius fissum. Perianthium obcordatum, compressum, dorso planiusculum, ventre medio carinato-convexum, apice ciliato.

Valdopere affinis *Lejeuniae diversitextae* Hpe et Gottsche *Linn.* XXV. p. 357. Differt vero nostra: foliis mucronatis, dorso tuberculosis, amphigastriis ovatis aeque ac folia inaequaliter ciliato-dentatis. *Lejeunia arguta* N. ab E. foliis laevibus, laxe reticulatis gaudet.

TABULA XXII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali; f.* 2. *pars caulis a dorso visa, sexagies aucta; f.* 3. *pars caulis fructiferi a ventre, quadragies aucta; f.* 4. *folium singulum, octogies auctum; f.* 5. *textura folii a dorso, centies et quinquagies auctum; f.* 6. *amphigastrium caulinum, centies auctum; f.* 7. *perianthium cum foliis involucralibus a dorso, quadragies aucta.*

6. LEJEUNIA DESCISCENS v. d. Sd. Lc. Caule repente vage pinnatimque ramoso; foliis imbricatis semiverticalibus rotundo-oblongis, apice obtusissimo subinflexis integerrimis, basi sinuato-complicatis, lobulo ovali-quadrato oblique truncato; amphigastriis dissitiusculis orbiculatis indivisis integerrimis; fructu laterali; perianthio ovato quadricorni, cornibus erectis.

Habitat Surinamum. Focke in Herb. Miquel.

Planta fusca, repens. Caulis 0,02 longus, cum foliis, 0,0012 latus, vage pinnatimque ramosus; ramulis brevibus, patentibus. Folia imbricata, semiverticalia, rotundo-oblonga et ovato-oblonga, integerrima, apice rotunda, plana et subdeflexa, basi ventrali sinuato-complicata; lobulus planiusculus, ovali-quadratus, oblique truncatus, integer vel unidenticulatus, denticulus rectus. Amphigastria foliis quadruplo fere minora, plana, adpressa, orbiculata, in speciminibus fortioribus subdecurrentia marginibusque reflexa. Rete foliorum e cellulis laxis, subrotundis, contiguis compositum, circum lobulum amplioribus. Fructus in ramulo lateralis. Folia involucralia conformia, biloba; lobus ventralis planus, ovatus, obtusus. Amphigastrium involucrale caulinis majus, suborbiculatum, indivisum, integerrimum. Perianthium ovatum, quadricorne, cornibus erectis, versus apicem introrsum canaliculatis, margine apicali obtuso, reflexo.

Species insignis inter *Ceratanthaceas* ob amphigastria indivisa, quae in reliquis bifida esse solent. Planta sterilis magnam similitudinem habet *Lejeuniae uncilobae* Ldbg. Haec vero paullo

latior est; folia apice habet plana, texturae aequalis, spissioris, minus pellucidae; amphigastria contigua, paullo majora, quandoque transversa, foliorum lobulos uncinatim dentatos magis quoque obtegunt.

TABULA XXII.

Fig. 1. *Planta magnitudine naturali*; *f.* 2. *pars caulis a dorso visa, quadragies aucta; f.* 3. *ramus cum perianthio a ventre visus, quadragies auctus; f.* 4. *textura folii, centies aucta*; *f.* 5. *amphigastrium involucrale, octogies auctum.*



INDEX

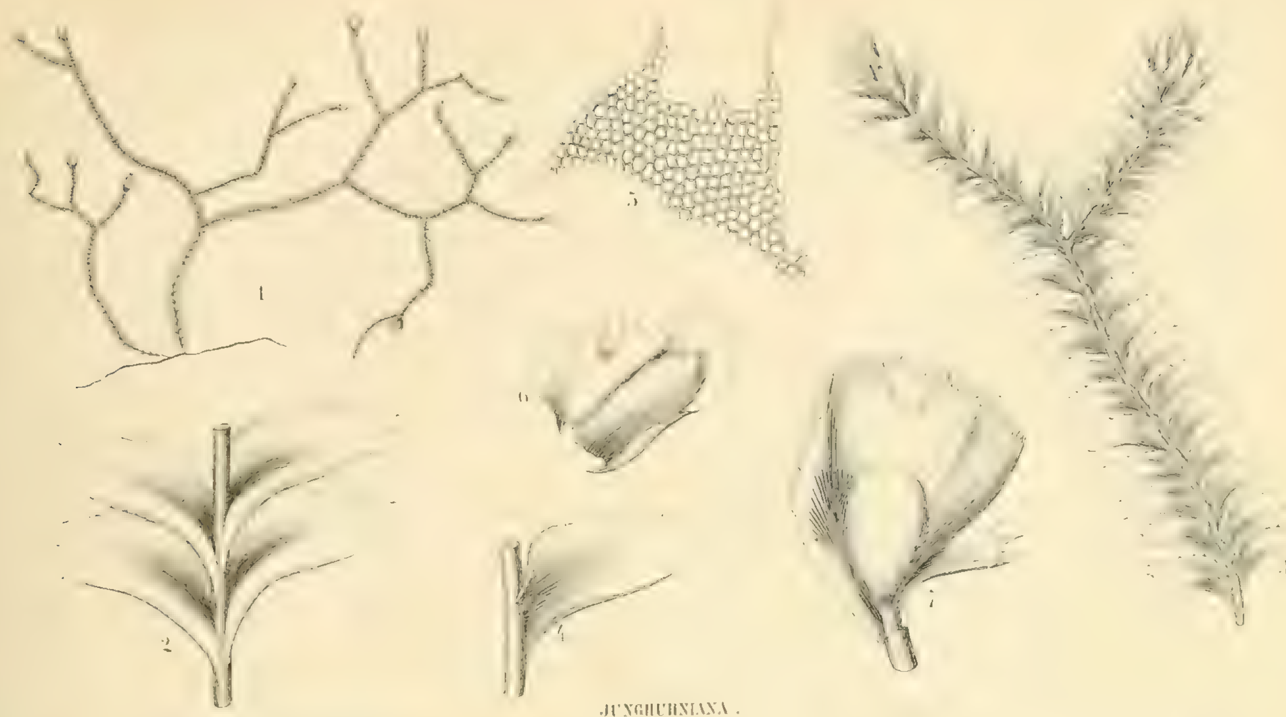
GENERUM ET SPECIERUM.

EMENDANDA.

Pag. 10.	lin. 7.	ab infer.	alteriove	lege:	alterove
» 18.	» 13.	—	ep	»	Hep.
» 19.	» 15.	—	*nuturali*	»	*naturali*
» 23.	» 8.	a super.	flagillifero	»	flagellifero
» 28.	» 18.	ab infer.	perianthum	»	perianthium
» 31.	» 15.	—	§	»	§ 1.
» 47.	» 5.	—	N. ab B.	»	N. ab E.
» 56.	» 4.	—	PHRAMICOMA	»	PHRAGMICOMA
» 68.	» 7.	a super.	ventralis	»	dorsalis
» 70.	» 7.	—	quartum	»	quartam
» 82.	» 17.	—	ventralis late	»	dorsalis late

Tab. IV. fig. 7. Folia suprema rami spicigeri *Pl. Sandei*, *supra* basin spicarum sunt insculpta; finge *retro* eandem.

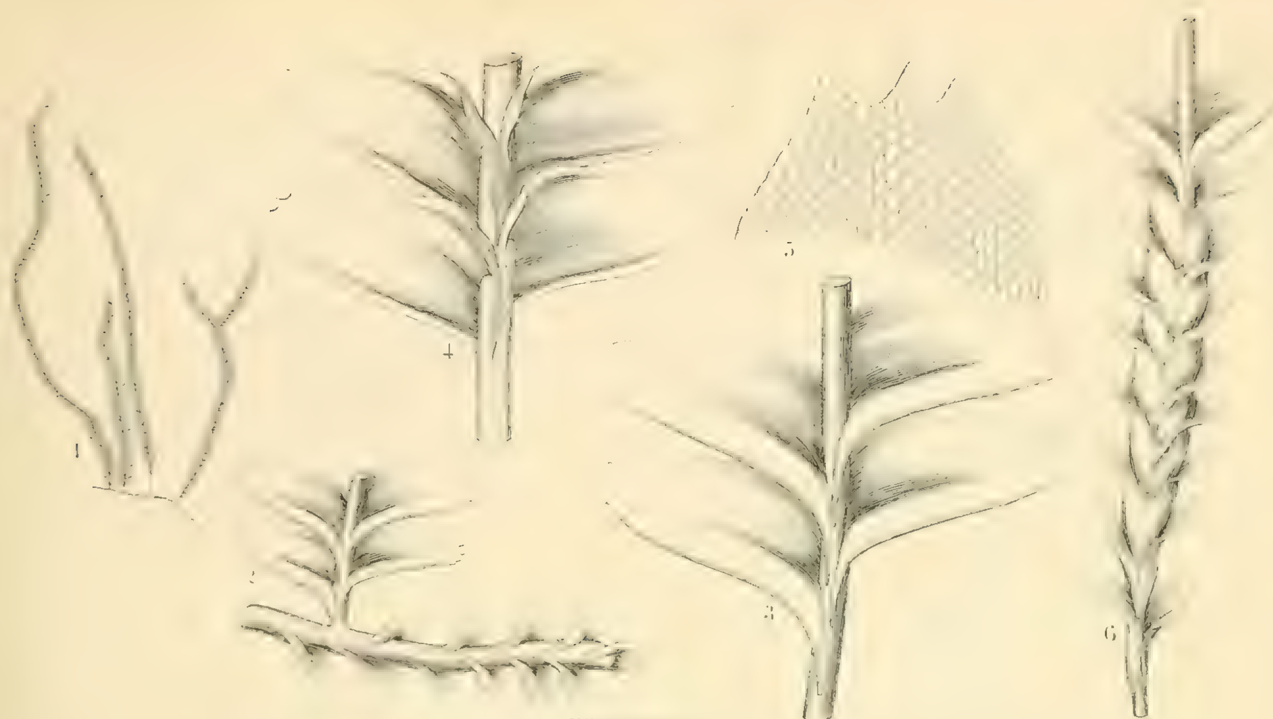
» XXII. LIJEUNIA lege: LEJEUNIA.



JUNGHUHNIANA.

PROPINQUA.

PLAGIOCHILA.



UNGARANGANA



A. J. K. ... del. & lith.

TEYSMANNI.

Meyer & Co. Arnst. imp.



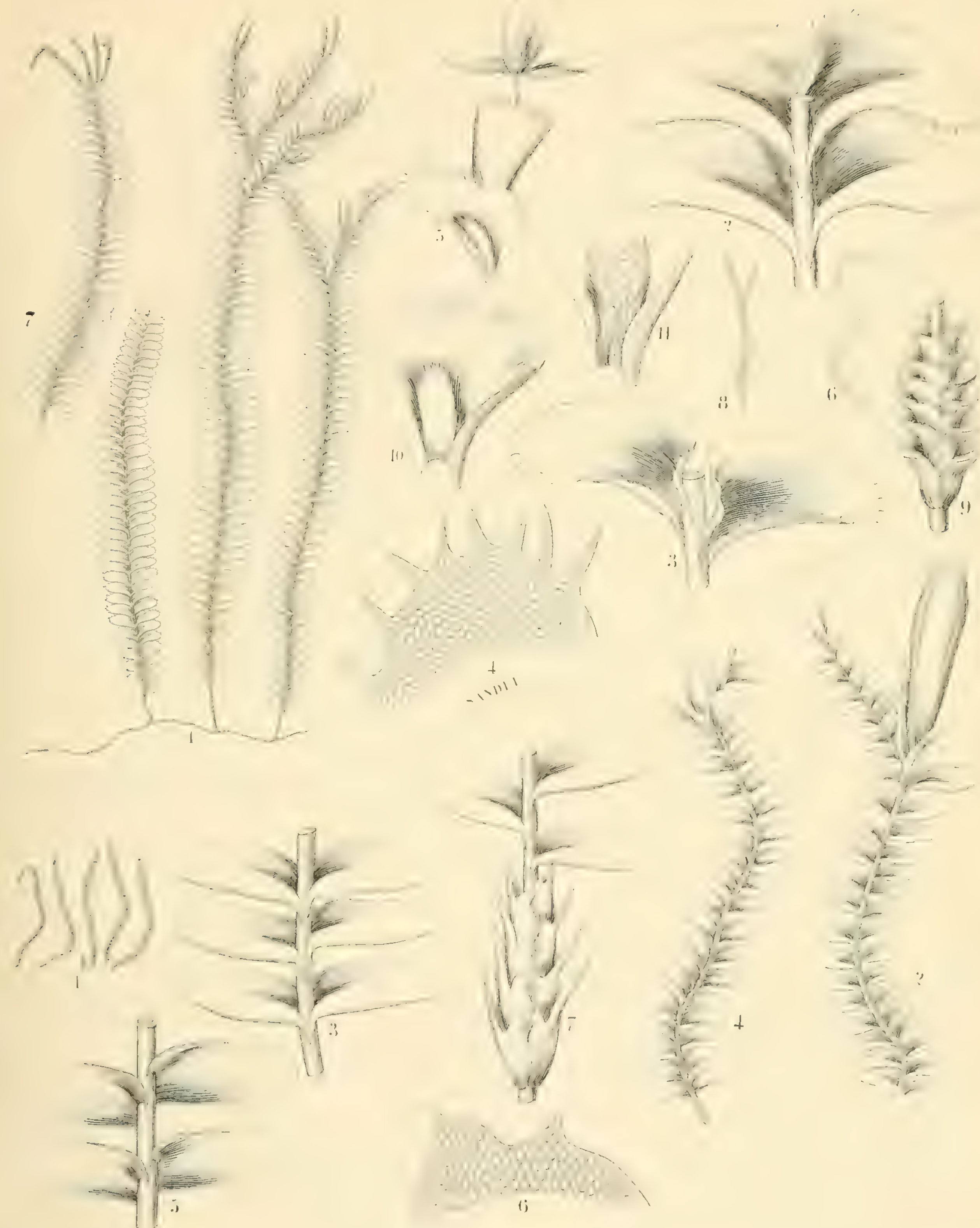
SEMIALATA.



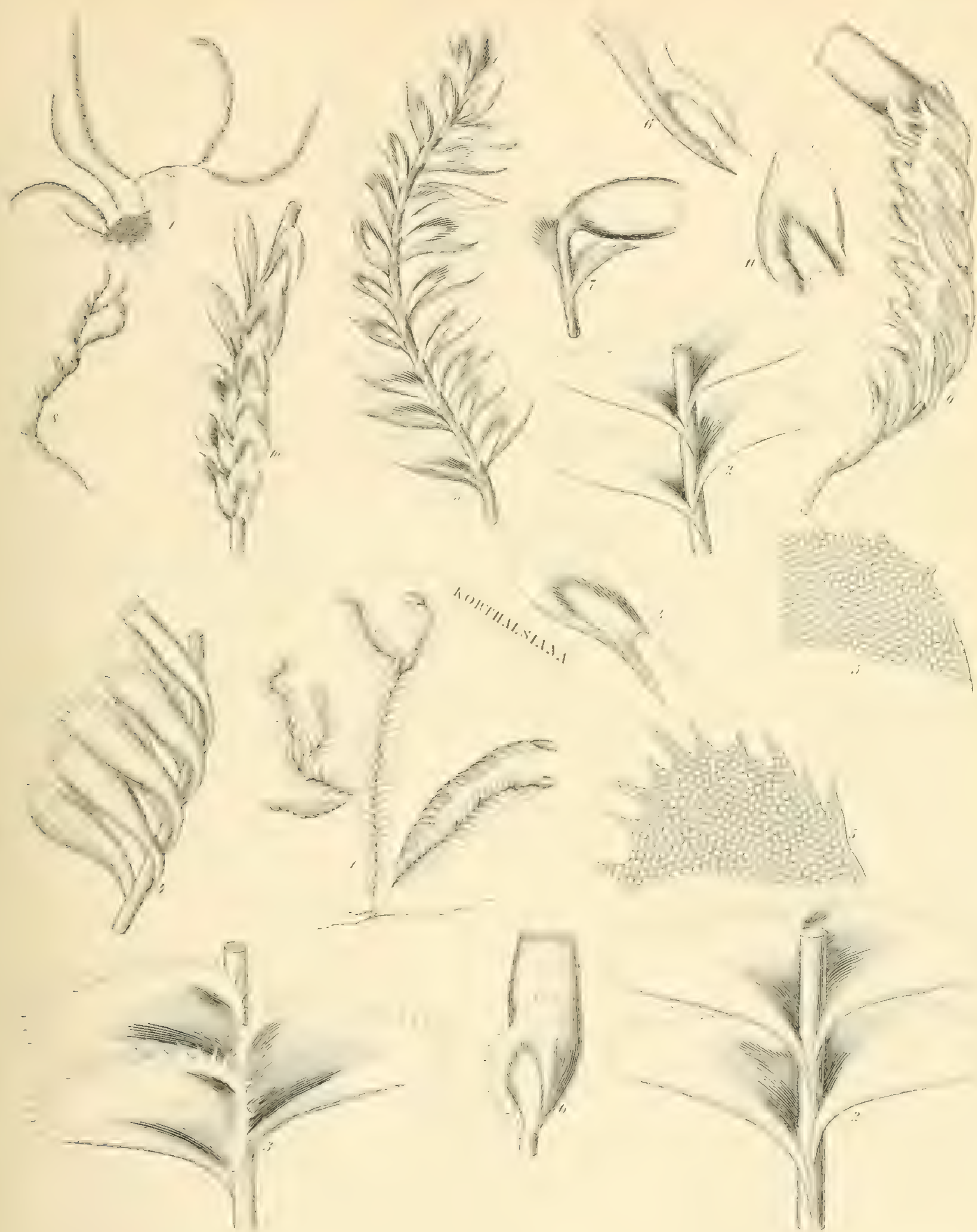
A. J. Kouwels del & lith.

GYMNOCLADA.

Meyer & Cº Amst impr



VARIABILIS.



FUSCA.

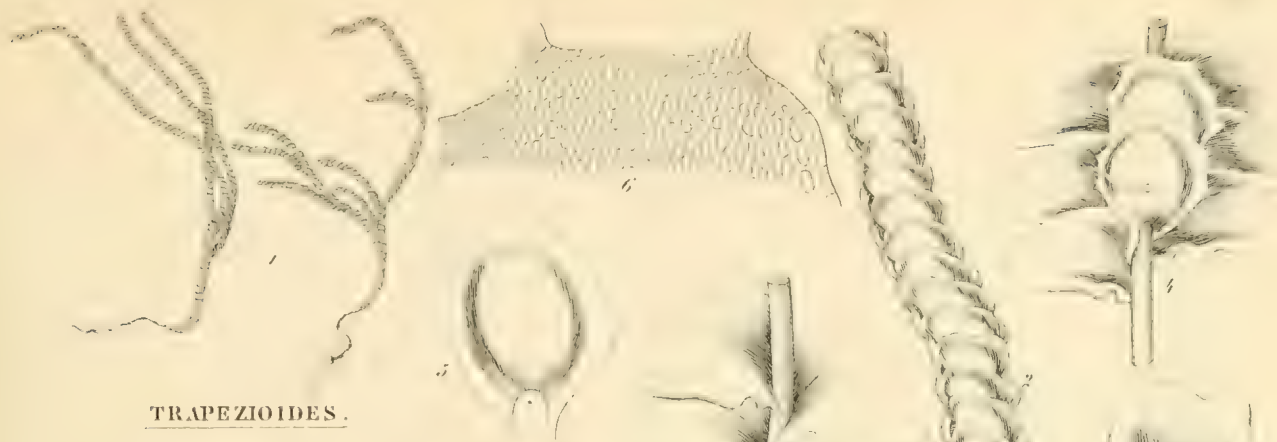
A. J. Kouwels del. & lith.



GONYOTRICHA.

A. J. Kerwels del & lith.

Meijer & Cº Amst. impr



TRAPEZIOIDES.

TJIWIDEIENSIS.

DENSUM.

A. J. Kouwels ad nat. & lith.

Meyer & Cº Amst impr.

MASTIGOBRYUM.



LINGUAEFORME.

JAVANICUM.

A. J. Kouwels del & lith.

Meyer & Co Amst impr.

VERH.D.KON.AKAD.VAN WETENSCH.D.V.



A. J. Kouwels del. & lith. PARADOXUM. Meyer C° Amst. impr.

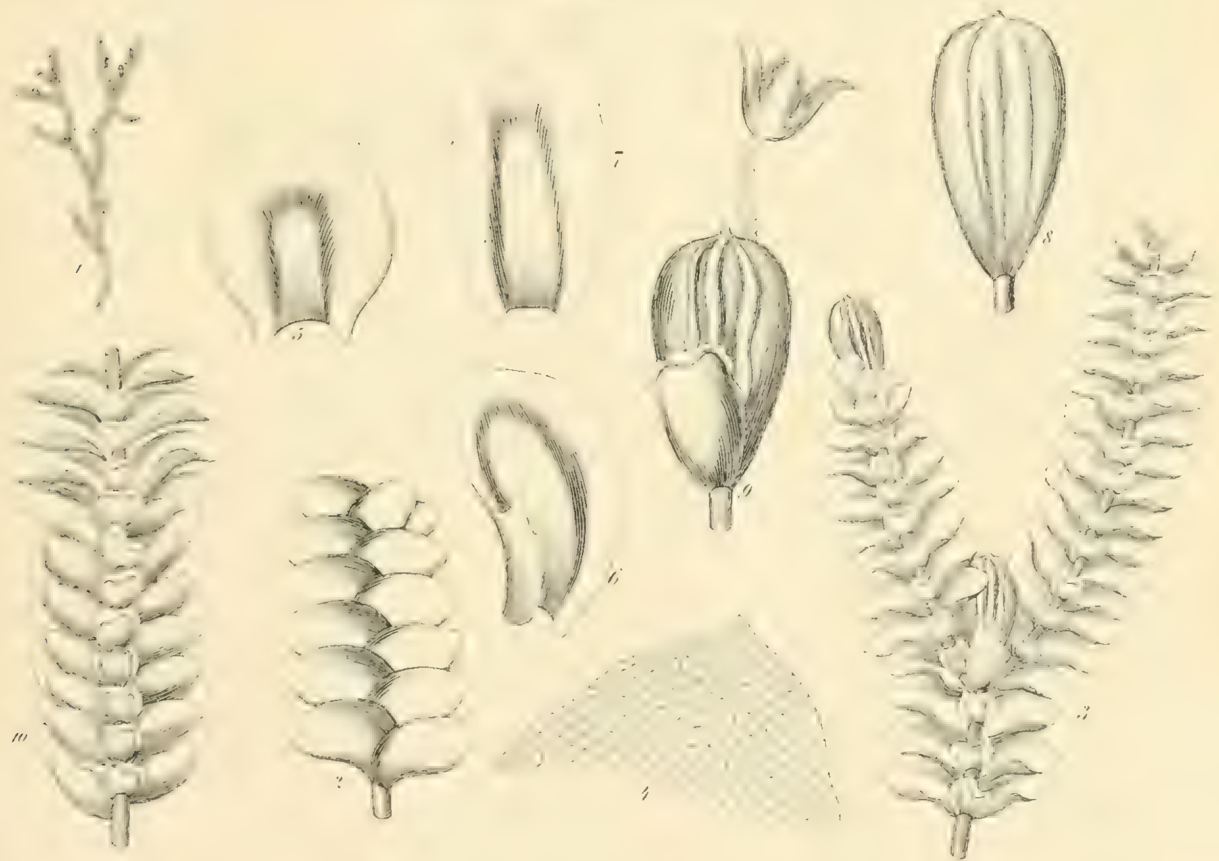


A. J. Kouwels del & lith.

Meijer & Cº Amst. impr.



POLYMORPHA α UNDULIFOLIA.



A. J. Kouwels del. & lith. POLYMORPHA β PLANIFOLIA. Meijer & C° Amst. imp.

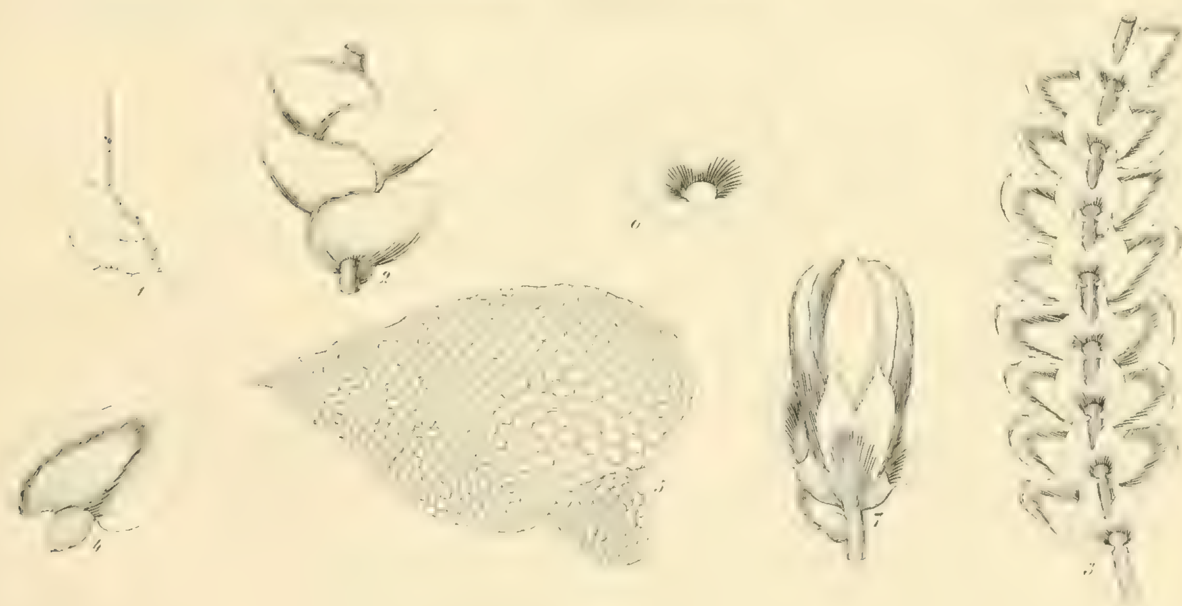
LEJEUNIA.



DOZYANA.



VENUSTA.

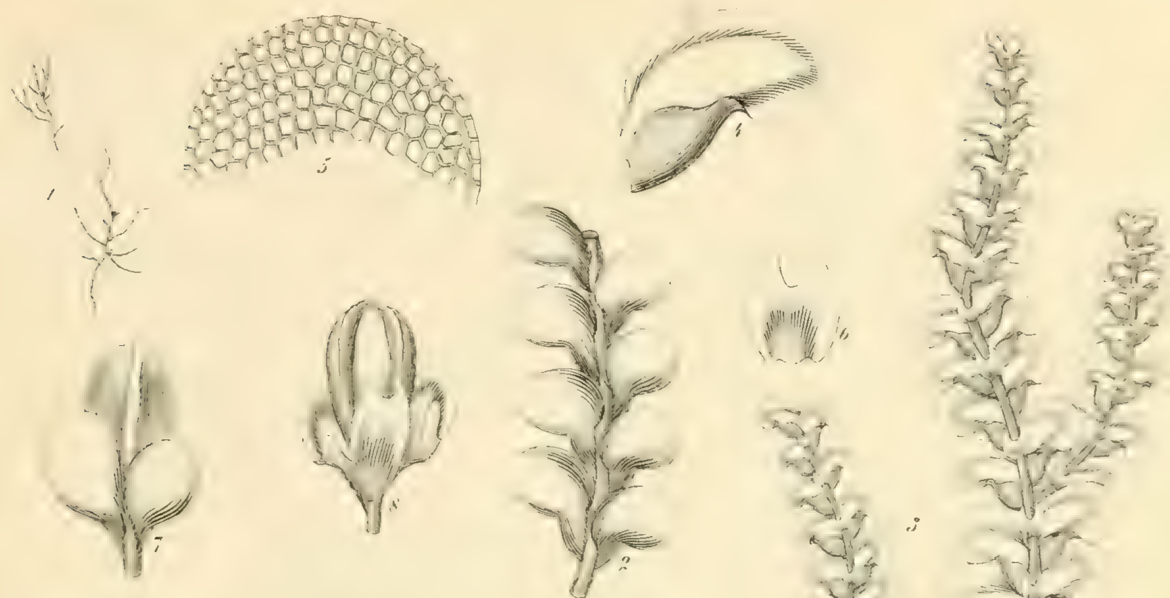


MOLKENBOERIANA.

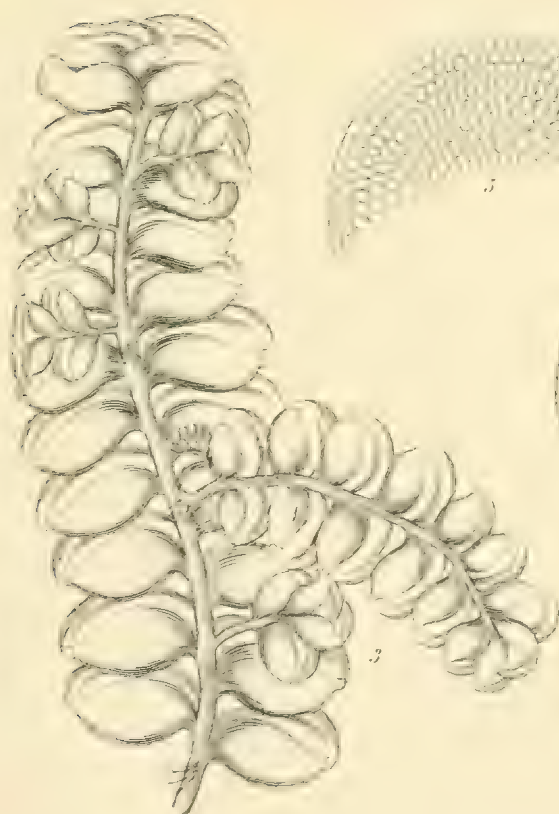


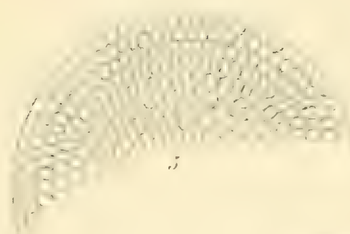
ALOBA.

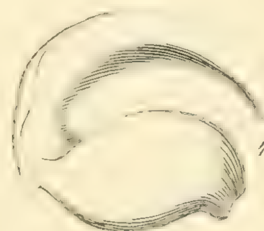
A. J. Kouwels ... Meijer & Co ...



DECURSIVA.











VESICARIA.

A. J. Kouwels del. & lith. Meijer & Cº. Amst. impr.



REFLEXISTIPULA.

A. J. Kouwels del. & lith. Meijer & Co Amst. impr.



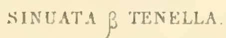
A. J. Kouwels del & lith.

PINNULATA.

Meijer & Co. Amst. impr.

SINUATA.

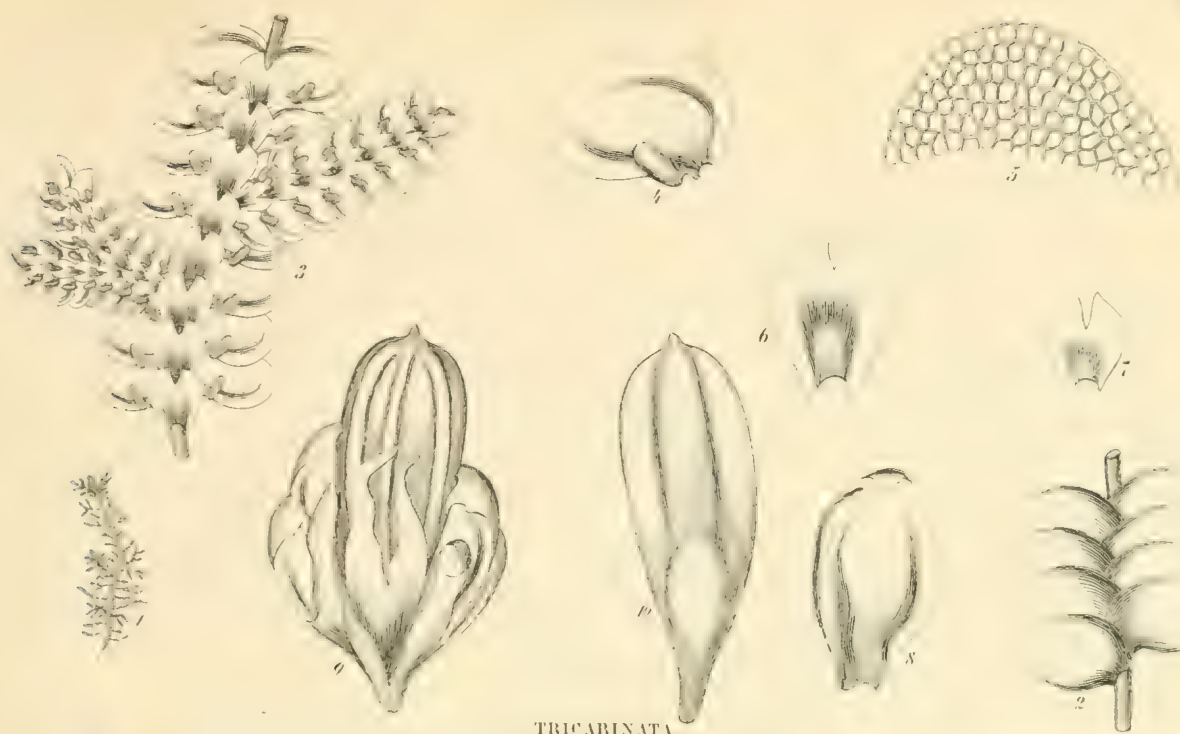




SINUATA β TENELLA.

A. J. Kouwels del & lith. Meyer & C° Amst impr.

FRULLANIA.



TRICARINATA.



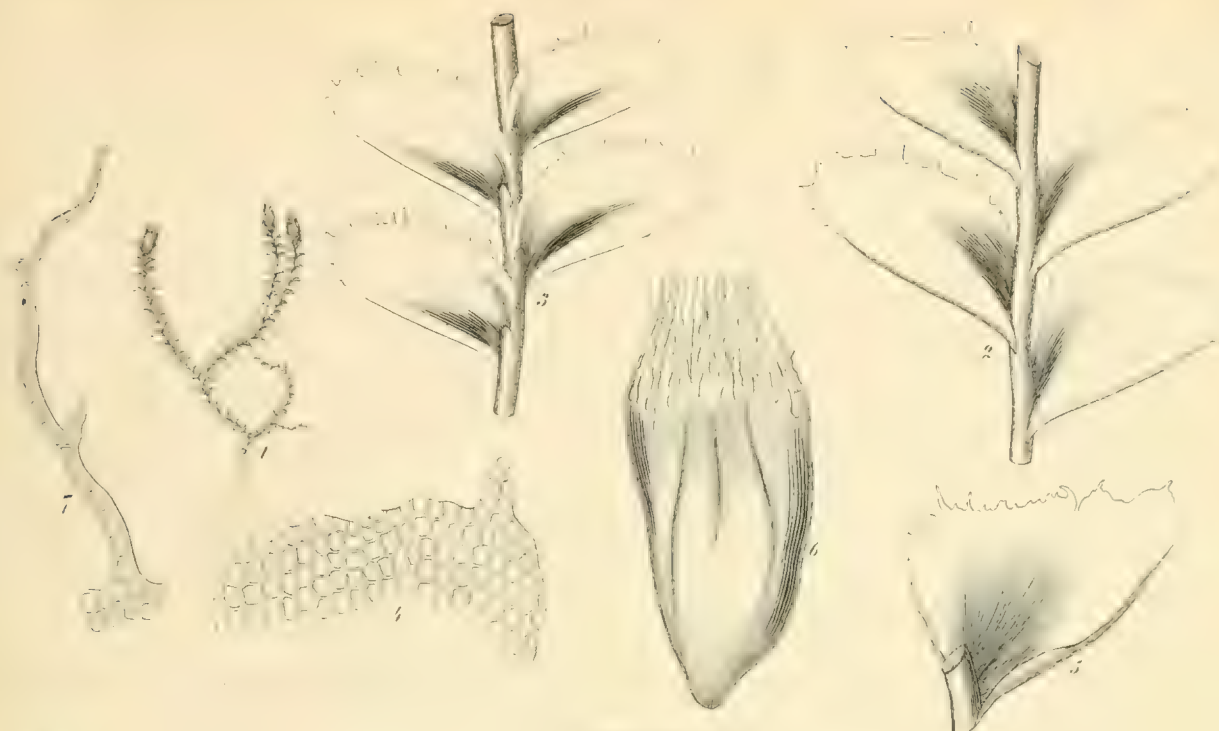
MINOR.

FRULLANIA. BLASIA.



A. J. Kouwels

PLAGIOCHILA.



SURINAMENSIS

DREPANOPHYLLA.

A. J. Kouwels del. & lith.

MASTIGOBRYUM. MADOTHECA.

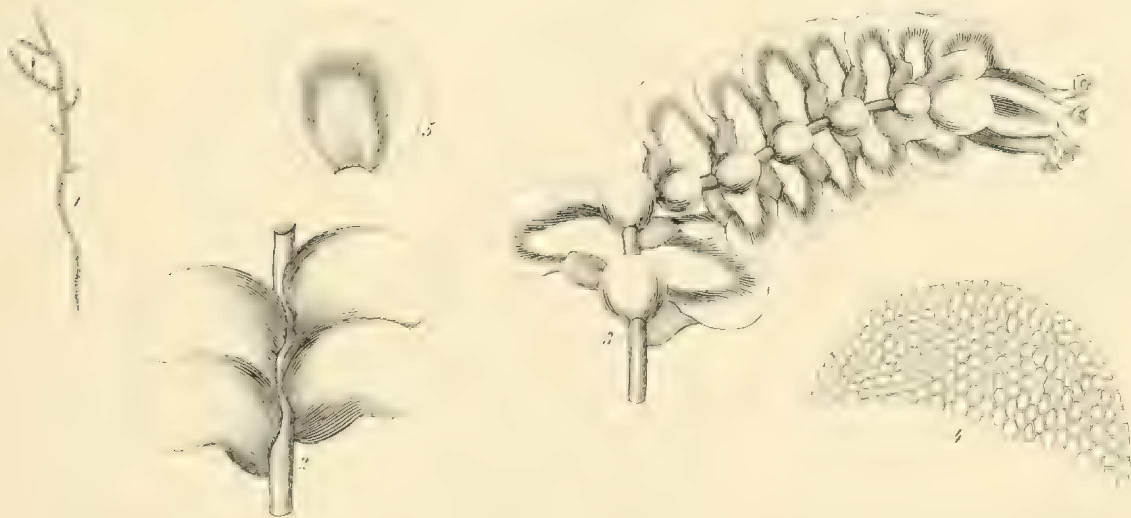


A.J. Kouwels del & lith.

Meijer & C? Amst impr.



MUCRONATA.



A. J. Kouwels del. & lith. DESCISCENS. Meijer & C° Amst. impr.

RÉDUCTION

DES

INTÉGRALES DÉFINIES GÉNÉRALES

$$\int_0^\infty F(x)\frac{Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}\,,\ \int_0^\infty F(x)\frac{Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}\,,$$

ET APPLICATION DE CES FORMULES AU CAS,
QUE F (x) A UN FACTEUR DE LA FORME $Sin.^a\,x$ ou $Cos.^a\,x$.

PAR

D. BIERENS DE HAAN.

Publiée par l'Académie Royale des Sciences à Amsterdam.



AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1857.

SOMMAIRE.



RÉDUCTION

DES

INTÉGRALES DÉFINIES GÉNÉRALES

$$\int_0^\infty \mathrm{F}(x)\frac{Cos.p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}\ ,\ \int_0^\infty \mathrm{F}(x)\frac{Sin.p\,x\,d\,x}{q^2+x^2},$$

ET APPLICATION DE CES FORMULES AU CAS,
QUE F (x) A UN FACTEUR DE LA FORME $Sin.^a x$ ou $Cos.^a x$.

PAR

D. BIERENS DE HAAN.

I. DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

1. Parmi toutes les méthodes différentes, que l'on a imaginées et appliquées à l'évaluation des intégrales définies, il y en a auxquelles le développement en série sert de base: et parmi celles-ci de nouveau, l'on distingue la suivante, qui est assez connue.

Après avoir développé un facteur quelconque de la fonction à intégrer dans une série, cette fonction se trouve elle-même développée dans une telle série: lorsque donc on prend l'intégrale de cette fonction, on aura une série d'intégrales partielles, au lieu de l'intégrale de la série elle-même, comme un des premiers théorèmes de la théorie des fonctions nous l'apprend. Dans le cas que toutes ces intégrales partielles, qui en général se trouveront être pour la plupart ou même toutes d'une même forme, sont connues, on connait par suite aussi l'intégrale cherchée; mais cette valeur a en général la forme d'une série, et ne se présente sous forme finie que dans quelques cas spéciaux; néanmoins la première forme peut aussi offrir ses avantages particuliers.

On peut appliquer cette méthode à l'intégrale définie générale

$$I = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)\, dx ,$$

lorsqu'une des fonctions, par exemple $\varphi(x)$, est développable dans une série, dont les termes dépendent des Cosinus ou des Sinus des multiples successifs de la variable, c'est-à-dire, lorsqu'on a:

$$\varphi_1(x) = A_0 + \sum_1^c A_n \, Cos.\, n s x \text{ ou } \varphi_2(x) = \sum_1^c B_n \, Sin\; n s x \,; \; *) \; \ldots . \; (a)$$

car alors l'intégrale I consiste dans une série de termes, qui auront la forme

$$\int_a^b f(x)\, Cos.\, n s x\, dx \text{ ou } \int_a^b f(x)\, Sin.\, n s x dx \,;$$

et l'on a, en désignant notre intégrale dans les deux cas précédents par I_1 et I_2, correspondantes à la forme $\varphi_1(x)$ ou $\varphi_2(x)$ dans les formules (a),

$$I_1 = \int_a^b f(x) \varphi_1(x) dx = \int_a^b f(x) dx \left\{ A_0 + \sum_1^c A_n \, Cos.\, n s x \right\} = A_0 \int_a^b f(x) dx + \sum_1^c A_n \int_a^b f(x)\, Cos.\, n s x dx . \; (A)$$

$$I_2 = \int_a^b f(x) \varphi_2(x) dx = \int_a^b f(x)\, dx \sum_1^c B_n \, Sin.\, n s x \qquad = \qquad \sum_1^c B_n \int f(x) Sin.\, n s x dx . \; (B)$$

Mais ces deux formules générales donnent lieu à quelques observations. En premier lieu, c peut être un nombre fini, de sorte que la série d'intégrales dans ces formules est elle-même finie, alors les formules (a), (A) et (B) valent toujours sans aucune restriction. Au contraire cela n'a pas toujours lieu, quand c devient infini, que la série dans ces formules se prolonge à l'infini elle-même: il faut alors, que les séries (a) soient convergentes pour toutes les valeurs de x, situées entre les limites a et b de l'intégration; et encore faut-il que les séries (A) et (B) soient convergentes, lorsque les intégrations ont été effectuées. Ces conditions sont évidentes: or, la première

---

*) Le signe de sommation $\sum_1^c f(n)$

désigne ici, et par la suite, la série $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots\ldots\ldots f(c)$;
où l'on voit que la lettre n représente l'argument qui parcourt la suite des nombres naturels de $n = 1$ à $n = c$, et où c doit toujours être un nombre entier.

est nécessaire lorsqu'on veut intégrer ces séries entre les limites a et b, car les équations (a) ne seraient plus toujours identiques dans le cas contraire et ne donneraient plus de relation entre la série et la fonction, qu'elle doit représenter: il n'est plus permis de substituer identiquement les séries aux fonctions, et tout le raisonnement, qui a conduit aux formules (A) et (B), perd son exactitude. Pour les limites a et b elles-mêmes pourtant cette condition n'est pas de rigueur, car il arrive fréquemment, qu'après l'intégration le résultat, c'est-à-dire les intégrales

$$\int_a^b f(x)\, Cos.\, nsx\, dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\, Sin.\, nsx\, dx,$$

obtiennent néanmoins une valeur parfaitement définie, et alors les équations (A) et (B) ne cessent de subsister. Mais en second lieu ces séries-ci doivent être convergentes elles-mêmes après l'intégration, ce qui est bien clair; puisqu'autrement elles manqueraient de somme, et que dès-lors cette somme ne saurait être représentée par les intégrales définies I_1 ou I_2.

Quant à l'usage de ces formules générales (A) et (B), l'on s'aperçoit aisément que la fonction $f(x)$ doit avoir une telle forme, que les trois intégrales

$$\int_a^b f(x)\, dx\,,\quad \int_a^b f(x)\, Cos.\, nsx\, dx \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\, Sin.\, nsx\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

obtiennent une valeur finie et connue. Mais alors aussi les derniers membres de ces formules sont des séries, qui dépendent seulement des constantes, que l'on trouve dans l'intégrale cherchée; et ces séries donnent lieu à des résultats d'une classe différente, selon qu'elles peuvent être regardées ou non comme les développements d'une fonction connue quelconque. Dans le premier cas, l'on obtient une valeur finie pour l'intégrale définie correspondante et l'on a effectué une évaluation proprement dite; au cas contraire, que la série ne peut pas se réduire au développement d'une fonction connue, et en outre qu'elle est infinie — car une série finie retomberait sous la catégorie des fonctions finies — l'on acquiert une relation entre une intégrale définie d'un côté et une série infinie de l'autre; une de ces relations, qui souvent sont d'un grand intérêt tant pour la théorie des intégrales définies, que pour celle des séries infinies.

2. Pour notre but actuel, soit $a = o$, $b = \infty$ et prenons $f(x) = \frac{q}{q^2 + x^2}$, les intégrales ($b$) deviendront:

$$\int_0^{\infty}\frac{q\,dx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2},\int_0^{\infty}\frac{q\,Cos.\,nsx\,dx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-nqs},\int_0^{\infty}\frac{q\,Sin.\,nsx\,dx}{q^2+x^2}=\frac{1}{2}\left[e^{-nqs}Ei.(nqs)-e^{nqs}Ei.(-nqs)\right]. \quad (c)$$

Pour $f(x)=\frac{x}{q^2+x^2}$ au contraire les mêmes intégrales donnent:

$$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=\frac{1}{2}\,l\,\infty=\infty\,,\int_0^{\infty}\frac{x\,Cos.\,nsx\,dx}{q^2+x^2}=-\frac{1}{2}\left[e^{nqs}Ei.(-nqs)+e^{-nqs}Ei.(nqs)\right],$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x\,Sin.\,nsx\,dx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-nqs}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (d)$$

Observons que ces six formules d'intégrales définies se trouvent dans mes Tables d'Intégrales Définies etc. (Voir Tome IV de ces Mémoires, respectivement à la T. 19. N°. 2, T. 205. N°. 5, T. 205. N°. 10, comme somme de T. 5. N°. 9 (pour $p=q=1$) et de T. 51. N°. 15, à la T. 205. N°. 11, et T. 205. N°. 6, où l'on pourra consulter la litérature, ce qui nous épargnera la peine de les déduire ici. *)

Il résulte des formules (c) et (d) que la supposition $f(x)=\frac{q}{q^2+x^2}$ est possible dans les formules (A) et (B) toutes deux, tandis que l'autre $f(x)=\frac{x}{q^2+x^2}$ n'est en général permise que dans la seule formule (B), attendu que dans la formule (A) elle conduirait à un résultat infini. On parvient donc au moyen des équations générales (A) et (B) aux formules suivantes:

$$\int_0^{\infty}\varphi_1(x)\frac{q\,dx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2}A_0+\frac{\pi}{2}\sum_1^c A_n e^{-nqs}=\frac{\pi}{2}\sum_0^c A_n e^{-nqs}\quad\ldots\ldots\ldots\quad (C)$$

$$\int_0^{\infty}\varphi_2(x)\frac{q\,dx}{q^2+x^2}=\frac{1}{2}\sum_1^c A_n\left[e^{-nqs}Ei.(nqs)-e^{nqs}Ei.(-nqs)\right]\quad\ldots\ldots\ldots\quad (D)$$

$$\int_0^{\infty}\varphi_1(x)\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=\infty\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (E)$$

$$\int_0^{\infty}\varphi_2(x)\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2}\sum_1^c B^n e^{-nqs}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (F)$$

---

*) Ici la fonction Ei (a), l'Exponentielle intégrale, désigne l'intégrale:

$$Ei.(x)=\int_{-a}^{\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{x}$$

Dans la formule (C) on a compris le premier terme détaché A_0 sous le signe de sommation; et cela est permis puisque le terme général $A_n e^{-nqs}$ n'est pour $n = 0$ rien d'autre que A_0. Au lieu de la formule (E), qui est peu utile sous cette forme-là, on pourra aisément obtenir une autre intégrale plus convenable; prenons au lieu de $\varphi_1(x)$ la fonction

$$\varphi_1(x) - \varphi_1{}'(x), \text{où } \varphi_1{}'(x) = A_0{}' + \sum_1^{c'} A_n{}' \, Cos. n s' x.$$

Aussitôt que $A_0{}'$ devient égal à A_0, comme nous l'admettons ici, l'on a

$$\varphi_1(x) - \varphi_1{}'(x) = \sum_1^{c} A_n \, Cos. n s x - \sum_1^{c'} A_n{}' \, Cos. n s' x; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

et lorsqu'à présent on fait usage de la formule générale (A), le premier terme, qui était infini comme facteur de A_0, s'évanouit, et l'on a:

$$\int_0^\infty \{\varphi_1(x) - \varphi_1{}'(x)\} \frac{x\,dx}{q^2 + x^2} = -\frac{1}{2} \sum_1^{c} A_n \left[e^{nqs} Ei.(-nqs) + e^{-nqs} Ei.(nqs)\right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_1^{c'} A_n{}' \left[e^{nqs'} Ei.(-nqs') + e^{-nqs'} Ei.(nqs')\right]. \quad (E_1)$$

5. Mais si nous considérons les formules (c) et (d) plus attentivement, elles nous apprennent, que la fonction $f(x)$ peut encore contenir comme facteurs les fonctions circulaires directes $Sin. p x$ et $Cos. p x$, sans que pour cela les intégrales (b) changent de nature. Supposons en effet en premier lieu:

$$f(x) = \frac{q\,Sin. p x}{q^2 + x^2} \text{ et } f(x) = \frac{q\,Cos. p x}{q^2 + x^2},$$

alors les formules (b) deviennent:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{q\,Sin. p x\,dx}{q^2 + x^2} = \frac{1}{2}\left[e^{-pq} Ei.(pq) - e^{pq} Ei.(-pq)\right] \\
&\int_0^\infty \frac{q\,Sin. p x . Cos. n s x\,dx}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2 + x^2} \, \frac{Sin. \{(p + ns)x\} + Sin. \{(p - ns)x\}}{2} \\
&\int_0^\infty \frac{q\,Sin. p x . Sin. n s x\,dx}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2 + x^2} \, \frac{Cos. \{(p - ns)x\} - Cos. \{(p + ns)x\}}{2} = \\
&\qquad = \int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2 + x^2} \, \frac{Cos. \{(ns - p)x\} - Cos. \{(ns + p)x\}}{2}
\end{aligned}\right\} (f)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^\infty \frac{q\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\,e^{-pq} \\[2ex]
\displaystyle\int_0^\infty \frac{q\,Cos.\,p\,x.\,Cos.\,n\,s\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,d\,x}{q^2+x^2}\,\frac{Cos.\,\{(p-n\,s)\,x\}+Cos.\,\{(p+n\,s)\,x\}}{2} = \\[2ex]
\qquad\qquad\displaystyle\int_0^\infty \frac{q\,d\,x}{q^2+x^2}\,\frac{Cos.\,\{(n\,s-p)\,x\}+Cos.\,\{(n\,s+p)\,x\}}{2} \\[2ex]
\displaystyle\int_0^\infty \frac{q\,Cos.\,p\,x.\,Sin.\,n\,s\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,d\,x}{q^2+x^2}\,\frac{Sin.\,\{(p+n\,s)\,x\}-Sin.\,\{(p-n\,s)\,x\}}{2}
\end{array}\right\}(f)$$

Dans les formules deuxième, troisième, cinquième et sixième, on a déjà transformé un facteur sous le signe d'intégration, qui était un produit de deux fonctions circulaires directes, dans une somme ou une différence de deux fonctions semblables, selon les règles connues de la Goniométrie: de sorte que ces intégrales définies seraient partagées en deux autres, dont les valeurs sont déjà données par les formules (c). Mais ici il ne faut absolument pas perdre de vue, que la seconde de ces intégrales (c) ne vaut que pour le cosinus d'un arc *positif*. Or, dans les intégrales, dont il est question maintenant, l'arc $(p+ns)x$ est toujours positif; mais dans l'autre arc $(p-ns)x$ le signe dépend du coefficient $p-ns$: et comme dans les sommations des équations générales (A) et (B) n doit parcourir la suite des nombres naturels depuis 1 jusqu'à c, $p-ns$ est positif aussi longtemps que ns est plus petit que p ou bien n plus petit que $\frac{p}{s}$, mais s'évanouit lorsque ns est égal à p ou n égal à $\frac{p}{s}$, et même devient négatif lorsque ns devient plus grand que p ou bien n plus grand que $\frac{p}{s}$. Il s'ensuit, qu'en général l'on doit décomposer les sommations qui dépendent de cette deuxième intégrale (c), au lieu de les prendre depuis $n=1$ à $n=c$: et cela bien dans deux autres sommations, dont l'une va de 1 à d, et l'autre de $d+1$ à c, pourvu que d représente le plus grand nombre entier, qui soit contenu dans $\frac{p}{s}$, de sorte que l'on ait $p=ds+p'$, $p'<s$, $d<c$.

C'est seulement dans le cas que ns reste toujours plus petit que p et que sa plus grande valeur cs est encore moindre que p, que la seconde de ces

sommations n'a plus lieu, et que l'on garde la forme originelle, puisqu'alors $p - ns$ reste constamment positif entre les limites de la sommation.

Mais aussitôt que $\frac{p}{s}$ est un nombre entier, c'est-à-dire que l'on a $p = ds$ et $p' = 0$, les intégrales (b) acquièrent une autre valeur spéciale pour $n = d$, car alors on a:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{q\,Sin.\,px.\,Sin.\,nsx\,dx}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,Sin.\,px.\,Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,Sin.^2\,px\,dx}{q^2+x^2} = \\
&\quad = \int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2+x^2}\,\frac{1-Cos.\,2px}{2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}e^{-2pq} = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2pq}), \\
&\int_0^\infty \frac{q\,Cos.\,px.\,Cos.\,nsx\,dx}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,Cos.\,px.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,Cos.^2\,px\,dx}{q^2+x^2} = \\
&\quad = \int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2+x^2}\,\frac{1+Cos.\,2px}{2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}e^{-2pq} = \frac{\pi}{4}(1+e^{-2pq}),
\end{aligned}\right\}\ ,ns = p;\quad \ldots\ (g)$$

où de nouveau l'on a fait usage des deux premières intégrales (c) *). Il n'y a donc pas lieu de les employer aussi longtemps que cs est plus grand que p; mais aussitôt que cs devient égal à p, il faut sommer les premières expressions des formules (f) depuis $n = 1$ à $n = c - 1$, et prendre ensuite pour $n = c$, la valeur correspondante dans les formules (g). Lorsque dans le même cas ns était plus grand que p, l'on doit prendre les premières expressions dans les formules (f), depuis $n = 1$ jusqu'à $n = d - 1$, celle de l'équation (g) pour $n = d$, et sommer ensuite les secondes valeurs dans les formules (f) depuis $n = d + 1$ à $n = c$.

Ce que l'on vient d'observer à l'égard des intégrales, qui dépendent de la deuxième des intégrales (c), n'a pas d'influence auprès des deux autres formules de (f), qui dépendent au contraire de la troisième de ces intégrales (c), et cela puisque celle-ci vaut tout de même pour le Sinus d'un arc négatif, comme la réduction le prouve facilement. Car on a généralement

*) On trouve ces deux intégrales (g) dans mes „Tables d'Intégrales définies." T. 205. N°. 21. (dans le cas de $p = 1$) et T. 205. N°. 23.

$$\int_0^\infty \frac{q\, Sin.(-rx)\, dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\left[e^{rq}\, Ei.(-rq) - e^{-rq}\, Ei.(rq)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-rq}\, Ei.(rq) - e^{rq}\, Ei.(-rq)\right] = -\int_0^\infty \frac{q\, Sin.(+rx)\, dx}{q^2+x^2}$$

Ici donc il n'importe pas, que r soit représenté par $p - ns$ ou bien par $ns - p$, c'est-à-dire le résultat est exact, soit que $p - ns$ soit positif, ou qu'il soit négatif.

L'on peut donc à présent rassembler les cas discutés et les résultats des diverses observations dans les formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{q\, Sin.px\, dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\left[e^{-pq}\, Ei.(pq) - e^{pq}\, Ei.(-pq)\right] \\
&\int_0^\infty \frac{q\, Sin.px.Cos.nsx\, dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{4}\left[e^{-(p+ns)q}\, Ei.\{q(p+ns)\} - e^{(p+ns)q}\, Ei.\{-q(p+ns)\}\right] + \\
&\qquad + \frac{1}{4}\left[e^{-(p-ns)q}\, Ei.\{q(p-ns)\} - e^{(p-ns)q}\, Ei.\{-q(p-ns)\}\right] \\
&\qquad = \frac{1}{4}\, e^{-pq}\left[e^{nsq}\, Ei.\{q(p-ns)\} + e^{-nsq}\, Ei.\{q(p+ns)\}\right] - \\
&\qquad - \frac{1}{4}\, e^{pq}\left[e^{nsq}\, Ei.\{-q(p+ns)\} + e^{-nsq}\, Ei.\{-q(p-ns)\}\right] \\
&\int_0^\infty \frac{q\, Sin.px.Sin.nsx\, dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4}e^{-(p-ns)q} - \frac{\pi}{4}e^{-(p+ns)q} = \frac{\pi}{4}e^{-pq}\left(e^{nsq} - e^{-nsq}\right), \; ns < p; \\
&\qquad = \frac{\pi}{4}e^{-(ns-p)q} - \frac{\pi}{4}e^{-(ns+p)q} = \frac{\pi}{4}\left(e^{pq} - e^{-pq}\right)e^{-nsq}, \; ns > p; \\
&\qquad = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2pq}\right) \qquad\qquad , \; ns = p; \\
&\int_0^\infty \frac{q\, Cos.px\, dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-pq} \\
&\int_0^\infty \frac{q\, Cos.px.Cos.nsx\, dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4}e^{-(p-ns)q} + \frac{\pi}{4}e^{-(p+ns)q} = \frac{\pi}{4}e^{-pq}\left(e^{nsq} + e^{-nsq}\right), \; ns < p;
\end{aligned}\right\} (h)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{q\,Cos.px.Cos.nsx\,dx}{q^2+x^2} &= \frac{\pi}{4}e^{-(ns-p)q}+\frac{\pi}{4}e^{-(ns+p)q} = \frac{\pi}{4}(e^{pq}+e^{-pq})\,e^{-nsq}, \; ns > p;\\
&= \frac{\pi}{4}(1+e^{-2pq}) \qquad , ns = p;\\
\int_0^\infty \frac{q\,Cos.px.Sin.nsx\,dx}{q^2+x^2} &= \frac{1}{4}\left[e^{-(p+ns)q}Ei.\{q(p+ns)\} - e^{(p+ns)q}Ei.\{-q(p+ns)\}\right] -\\
&- \frac{1}{4}\left[e^{-(p-ns)q}Ei.\{q(p-ns)\} - e^{(p-ns)q}Ei.\{-q(p-ns)\}\right]\\
&= -\frac{1}{4}e^{-pq}\left[e^{nsq}Ei.\{q(p-ns)\} - e^{-nsq}Ei.\{q(p+ns)\}\right] -\\
&- \frac{1}{4}e^{pq}\left[e^{nsq}Ei.\{-q(p+ns)\} - e^{-nsq}Ei.\{-q(p-ns)\}\right]
\end{aligned}\right\} (h)$$

Dans le cas, que $\frac{p}{s}$ est un nombre entier, c'est-à-dire que p est égal à ns, il se trouve auprès de la sommation pour cette valeur de $n = \frac{p}{s}$ un terme, qui dépend de la troisième valeur pour la troisième et la cinquième des intégrales (h); mais quand on met chaque fois $ns = p$ dans les deux premières valeurs pour les mêmes intégrales (pour ns moindre et plus grand que p), l'on retrouve des résultats tout-à-fait égaux à cette troisième valeur. Donc on n'a pas besoin de tenir un compte à part de ce terme, mais on peut l'admettre soit dans la sommation pour ns plus petit que p, soit dans celle, où ns est plus grand que p.

Il suffit donc de ces formules (h) pour décider de ce que les formules générales (A) et (B) deviennent, lorsqu'on y prend successivement $\frac{q\,Sin.px}{q^2+x^2}$ et $\frac{q\,Cos.px}{q^2+x^2}$ pour $f(x)$. On obtient alors:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{q\,Sin.px\,dx}{q^2+x^2} &= \frac{1}{4}e^{-pq}\sum_0^c A_n\left[e^{nsq}Ei.\{q(p-ns)\} + e^{-nsq}Ei.\{q(p+ns)\}\right]\\
&- \frac{1}{4}e^{pq}\sum_0^c A_n\left[e^{nsq}Ei.\{-q(p+ns)\} + e^{-nsq}Ei.\{-q(p-ns)\}\right] \; . \; (G)
\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{q\,Sin.px\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^c B_n(e^{nsq}-e^{-nsq}) \qquad , p \geqq cs\,; \; . \; (H_1)$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{q\,Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_1^d B_n\left(e^{nsq}-e^{-nsq}\right)+\frac{\pi}{4}\left(e^{pq}-e^{-pq}\right)\sum_{d+1}^c B_n\,e^{-nsq}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(e^{pq}-e^{-pq}\right)\sum_0^c B_n e^{-nsq}-\frac{\pi}{4}e^{pq}\sum_0^d B_n e^{-nsq}+\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^d B_n e^{nsq}\quad \left\{\begin{array}{l} p=ds+p',\\ p'<s,\\ d<c;\ .\ .\ (\mathrm{H}_2)\end{array}\right.$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{q\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^c A_n\left(e^{nsq}+e^{-nsq}\right)\qquad ,\ p\geqq cs;\ .\ (\mathrm{I}_1)$$

$$= \frac{\pi}{2}e^{-pq}+\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_1^d A_n\left(e^{nsq}+e^{-nsq}\right)+\frac{\pi}{4}\left(e^{pq}+e^{-pq}\right)\sum_{d+1}^c A_n\,e^{-nsq}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(e^{pq}+e^{-pq}\right)\sum_0^c A_n e^{-nsq}-\frac{\pi}{4}e^{pq}\sum_0^d A_n e^{-nsq}+\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^d A_n e^{nsq}\quad \left\{\begin{array}{l} p=ds+p',\\ p'<s,\\ d<c;\ .\ (\mathrm{I}_2)\end{array}\right.$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{q\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2} = -\frac{1}{4}e^{-pq}\sum_0^c B_n\left[e^{nsq}\,Ei.\left\{q(p-ns)\right\}-e^{-nsq}\,Ei.\left\{q(p+ns)\right\}\right]$$

$$-\frac{1}{4}e^{pq}\sum_0^c B_n\left[e^{nsq}\,Ei.\left\{-q(p+ns)\right\}-e^{-nsq}\,Ei.\left\{-q(p-ns)\right\}\right]\ .\ .\ (\mathrm{K})$$

L'on doit remarquer ici à l'égard de la transformation des sommations précédentes, que dans la formule (G) le premier terme, qui est fourni par l'équation générale (A), c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{2}\,A_0\left[e^{-pq}\,Ei.\,(pq)-e^{pq}\,Ei.\,(-pq)\right]$$

se trouve être la même chose, que ce qui provient des deux sommations, lorsqu'on y prend n égal à zéro: donc, puisque ces sommations étaient prises depuis 1 jusques à c, il faut les prendre de o à c, pour y admettre le terme mentionné. De même dans la formule (K) on a pris les sommations depuis o jusques à c, au lieu de les prendre de 1 à c, parceque pour la valeur zéro de n les deux termes s'évanouissent séparément, et que par suite ce changement de limites ne change en rien la valeur de l'intégrale elle-même. Dans l'équation (I_1) on a admis le premier terme, qui provient de l'équation générale (A), c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}e^{-pq}$, dans la sommation, qui commence alors avec la valeur zéro de n au lieu de l'unité, tout comme il a été justifié à l'occasion de la formule (G): dans (H_1) au contraire, par la même raison que dans la formule (K), on a changé la limite inférieure de la sommation, l'unité, dans zéro. Dans la formule (H_2) la sommation de $d+1$ à c est réduite à la différence de deux autres sommations, l'une depuis o jusques à c, l'autre de o à d; et de même dans l'équation (I_2). Mais en outre dans cette dernière (I_2)

on a pris pour l'autre sommation depuis 1 jusques à d, une autre de o à d, et cela pour y admettre le premier terme détaché $\frac{\pi}{2} e^{-pq}$, qui est fourni par l'équation générale (A), et qui coincide avec la fonction à sommer, lorsqu'on y prend le zéro pour n: tandis que dans la formule (II_2) la sommation de 1 à d est encore changée dans une autre de o à d, puisque le terme ajouté de la sorte pour la valeur zéro de n est nul lui-même, de sorte qu'il ne change rien au résultat.

Il s'ensuit que toutes les sommations commencent à présent avec zéro; cela a été effectué, d'une part afin d'avoir des formules d'une forme semblable, d'autre part puisqu'alors les sommations elles-mêmes deviennent en général plus faciles dans les cas spéciaux.

4. Passons aux substitutions analogues

$$f(x) = \frac{x \, Sin. \, p x}{q^2 + x^2} \text{ et } f(x) = \frac{x \, Cos. \, p x}{q^2 + x^2};$$

alors on trouve par l'intermédiaire des formules (b):

$$\int_0^\infty \frac{x \, Sin. \, p x \, d x}{q^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-pq}$$

$$\int_0^\infty \frac{x \, Sin. \, p x . Cos. \, n s x \, d x}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{x \, d x}{q^2 + x^2} \, \frac{Sin. \{(p + n s) x\} + Sin. \{(p - n s) x\}}{2} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x \, d x}{q^2 + x^2} \, \frac{Sin. \{(n s + p) x\} - Sin. \{(n s - p) x\}}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x \, Sin. \, p x . Sin. \, n s x \, d x}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{x \, d x}{q^2 + x^2} \, \frac{Cos. \{(p - n s) x\} - Cos. \{(p + n s) x\}}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x \, Cos. \, p x \, d x}{q^2 + x^2} = -\frac{1}{2} \{e^{pq} \, Ei. (-p q) + e^{-pq} \, Ei. (p q)\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x \, Cos. \, p x . Cos. \, n s x \, d x}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{x \, d x}{q^2 + x^2} \, \frac{Cos. \{(p - n s) x\} + Cos. \{(p + n s) x\}}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x \, Cos. \, p x . Sin. \, n s x \, d x}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{x \, d x}{q^2 + x^2} \, \frac{Sin. \{(p + n s) x\} - Sin. \{(p - n s) x\}}{2} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x \, d x}{q^2 + x^2} \, \frac{Sin. \{(n s + p) x\} + Sin. \{(n s - p) x\}}{2}$$

Ces équations donnent lieu aux mêmes observations que les équations du paragraphe précédent, en tant au moins qu'il s'y présente un produit de fonc-

tions circulaires directes comme facteur sous le signe d'intégration; ce produit est déjà décomposé dans une somme ou une différence de fonctions semblables, d'après les règles connues de la Goniométrie. Mais ici la valeur correspondante de l'intégrale, qui se trouve parmi les formules (d) donne lieu à l'équation

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.(-r\,x)\,d\,x}{q^2+x^2} = -\frac{1}{2}\left[e^{-qr}\,Ei.(q\,r) + e^{qr}\,Ei.(-q\,r)\right] = \int_0^\infty \frac{x\,Cos.(+r\,x)\,d\,x}{q^2+x^2}$$

de sorte que l'on n'a pas besoin auprès de la troisième et de la cinquième des formules précédentes d'observer si $p-ns$ soit positif ou bien négatif. Ceci ne vaut plus à l'égard de la deuxième et sixième de ces intégrales; car dans la transformation de ces formules on a l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,\{(p-n\,s)\}\,x\,d\,x}{q^2+x^2} \text{ ou } -\int_0^\infty \frac{Sin.\,\{(n\,s-p)\}\,x\,d\,x}{q^2+x^2},$$

et ici l'on doit prendre la première ou la seconde forme, selon que p est plus grand ou plus petit que ns, afin que le coefficient de x sous le signe *Sinus* reste constamment positif, comme il est de rigueur: la valeur de ces deux intégrales devient donc respectivement

$$\frac{\pi}{2}\,e^{-(p-ns)q} \text{ et } -\frac{\pi}{2}\,e^{-(ns-p)q}.$$

Si l'on a égard à ces observations, on acquiert à l'aide des intégrales (d) les formules suivantes

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\,e^{-pq}\\
&\int_0^\infty \frac{x Sin.px.Cos.nsx\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4}\,e^{-(p+ns)q} + \frac{\pi}{4}\,e^{-(p-ns)q} = \frac{\pi}{4}\,e^{-pq}\left(e^{nsq}+e^{-nsq}\right),\ n\,s<p;\\
&\qquad = \frac{\pi}{4}\,e^{-(ns+p)q} - \frac{\pi}{4}\,e^{-(ns-p)q} = \frac{\pi}{4}\left(e^{-pq}-e^{pq}\right)\,e^{-nsq},\ n\,s>p;\\
&\int_0^\infty \frac{x\,Sin.p\,x.\,Sin.ns\,x\,d.x}{q^2+x^2} = -\frac{1}{4}\left[e^{(p-ns)q}\,Ei.\{-q(p-ns)\} + e^{-(p-ns)q}\,Ei.\{q\,(p-n\,s)\}\right]\\
&\qquad + \frac{1}{4}\left[e^{(p+ns)q}\,Ei.\{-q\,(p+n\,s)\} + e^{-(p+ns)q}\,Ei.\{q\,(p+n\,s)\}\right]\\
&\qquad = \frac{1}{4}\,e^{pq}\left[e^{nsq}\,Ei.\,\{-q\,(p+n\,s)\} - e^{-nsq}\,Ei.\{-q\,(p-n\,s)\}\right]\\
&\qquad - \frac{1}{4}\,e^{-pq}\left[e^{nsq}\,Ei.\,\{q\,(p-n\,s)\} - e^{-nsq}\,Ei.\,\{q\,(p+n\,s)\}\right]
\end{aligned}\right\}\ (i)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x \, Cos. p x \, dx}{q^2+x^2} = -\frac{1}{2}\left\{e^{pq} Ei.(-pq) + e^{-pq} Ei.(pq)\right\}\\
&\int_0^\infty \frac{x \, Cos. px. Cos. nsx \, dx}{q^2+x^2} = -\frac{1}{4}\left[e^{(p-ns)q} Ei.\{-q(p-ns)\} - e^{-(p-ns)q} Ei.\{q(p-ns)\}\right]\\
&\qquad -\frac{1}{4}\left[e^{(p+ns)q} Ei.\{-q(p+ns)\} + e^{-(p+ns)q} Ei.\{q(p+ns)\}\right]\\
&\qquad = -\frac{1}{4} e^{pq}\left[e^{nsq} Ei.\{-q(p+ns)\} - e^{-nsq} Ei.\{-q(p-ns)\}\right]\\
&\qquad -\frac{1}{4} e^{-pq}\left[e^{nsq} Ei.\{q(p-ns)\} - e^{-nsq} Fi.\{q(p+ns)\}\right]\\
&\int_0^\infty \frac{x \, Cos. px. Sin. nsx \, dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4} e^{-(p+ns)q} - \frac{\pi}{4} e^{-(p-ns)q} = \frac{\pi}{4} e^{-pq}(e^{-nsq} - e^{nsq}), \; ns > p;\\
&\qquad = \frac{\pi}{4} e^{-(ns+p)q} + \frac{\pi}{4} e^{-(ns-p)q} = \frac{\pi}{4}(e^{pq} + e^{-pq}) e^{-nsq}, \; ns < p;
\end{aligned}\right\} (i)$$

Voilà les formules nécessaires pour les suppositions $f(x) = \frac{x \, Sin. p x}{q^2+x^2}$ ou $f(x) = \frac{x \, Cos. p x}{q^2+x^2}$ dans les équations générales (A) et (B). Seulement il faut faire attention en employant les deux valeurs de la deuxième et sixième de ces formules (i); car dans les sommations, qui se trouvent dans les formules (A) et (B) l'argument n commence à l'unité et parcourt ensuite la série des nombres naturels jusques à c; donc il faut avoir recours aux premières seulement des valeurs correspondantes, autant que cs est plus petit que p; tandis que pour cs plus grand que p, de sorte que l'on ait $p = ds + p'$, $p' < s$, $d < c$, l'on doit décomposer les sommations dans deux autres, dont l'une parcourt la suite des nombres naturels depuis l'unité jusques à d, la seconde de $d+1$ à c; pour ces deux sommations les deux valeurs des intégrales correspondantes des formules (i) valent donc respectivement.

Il se peut encore, que p soit exactement un multiple de s, c'est-à-dire égal à ds (où donc p' est zéro); alors, pour $n = d$, on a une autre forme pour les intégrales en question, qui deviennent pour ce cas spécial:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x \, Sin p x. Cos. nsx \, dx}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{x \, Sin. px. Cos. px \, dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x \, Sin. 2px \, dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-2pq}\\
&\int_0^\infty \frac{x \, Cos p x. Sin. nsx \, dx}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{x \, Cos. px. Sin. px \, dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x \, Sin. 2px \, dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-2pq}
\end{aligned}\right\}, \; ns = p; \quad \ldots (k)$$

Dans ce cas-ci cette valeur pour $ns = p$ diffère essentiellement des deux autres valeurs, que fourniraient les équations (i) (pour les cas de ns plus petit ou plus grand que p) et qui seraient ici

$$\frac{\pi}{4}(1 + e^{-2pq}) \text{ et } \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2pq});$$

de sorte que le cas actuel ne peut se déduire aucunement des deux autres, comme il arrivait précédemment. Il n'est donc pas permis ici, d'admettre le terme correspondant à la valeur $\frac{p}{s}$ de n dans l'une ou l'autre des deux sommations, où ns reste constamment moindre ou plus grand que p, mais on se trouve obligé de tenir compte de ce terme à part. Ici donc premièrement l'on doit sommer la première fonction, qui se trouve dans les équations correspondantes (i), de $n = 1$ jusques à $n = d - 1$, ensuite vienne un terme pour $ns = d$, tiré des formules (k), et enfin pour la seconde sommation depuis $d + 1$ à c, il faut avoir recours à la seconde valeur dans les formules (i).

Encore si p était exactement égal à cs, il faudrait prendre la sommation de $n = 1$ jusques à $n = c - 1$ à l'égard des premières valeurs, qui se trouvent dans les équations (i), et ajouter ensuite pour $n = c$ la valeur, qui est fournie par la formule (k).

A présent les équations générales (A) et (B) nous donnent, lorsqu'on a égard à toutes les observations précédentes, les formules:

$$\int_0^\infty \varphi_1(x) \frac{x \operatorname{Sin} px\, dx}{q^2 + x^2} = \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_0^c A_n (e^{nsq} + e^{-nsq}) \qquad , p > cs; \ldots (L_1)$$

$$= \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_0^{c-1} A_n (e^{nsq} + e^{-nsq}) + \frac{\pi}{4} A_c e^{-2pq} \qquad , p = cs; \ldots (L_2)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} e^{-pq} A_0 + \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_1^d A_n (e^{nsq} + e^{-nsq}) + \frac{\pi}{4}(e^{-pq} - e^{pq}) \sum_{d+1}^c A_n e^{-nsq} \\ &= \frac{\pi}{4}(e^{-pq} - e^{pq}) \sum_0^c A_n e^{-nsq} + \frac{\pi}{4} e^{pq} \sum_0^d A_n e^{-nsq} + \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_0^d A_n e^{nsq} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &, p = ds + p', \\ &p' < s, d < c; \\ &\ldots\ldots (L_3) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} e^{-pq} A_0 + \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_1^{d-1} A_n (e^{nsq} + e^{-nsq}) + \frac{\pi}{4} A_d e^{-2pq} + \frac{\pi}{4}(e^{-pq} - e^{pq}) \sum_{d+1}^c A_n e^{-nsq} \\ &= \frac{\pi}{4}(e^{-pq} - e^{pq}) \sum_0^c A_n e^{-nsq} + \frac{\pi}{4} e^{pq} \sum_0^{d-1} A_n e^{-nsq} + \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_0^{d-1} A_n e^{nsq} + \frac{\pi}{4} A_d \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &, p = ds, \\ &d < c; \\ &\ldots (L_4) \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{1}{4}e^{pq}\sum_0^c B_n\left[e^{nsq}\,Ei.\{-q(p+ns)\}-e^{-nsq}\,Ei.\{-q(p-ns)\}\right]$$

$$-\frac{1}{4}e^{-pq}\sum_0^c B_n\left[e^{nsq}\,Ei.\{q(p-ns)\}-e^{-nsq}\,Ei.\{q(p+ns)\}\right] \quad (M)$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = -\frac{1}{4}e^{pq}\sum_0^c A_n\left[e^{nsq}\,Ei.\{-q(p+ns)\}+e^{-nsq}Ei.\{-q(p-ns)\}\right]$$

$$-\frac{1}{4}e^{-pq}\sum_0^c A_n\left[e^{nsq}\,Ei.\{q(p-ns)\}+e^{-nsq}\,Ei.\{q(p+ns)\}\right] \quad (N)$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^c B_n(e^{-nsq}-e^{nsq}) \qquad ,p>cs;\ (O_1)$$

$$= \frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^{c-1} B_n(e^{-nsq}-e^{nsq})+\frac{\pi}{4}B_c\,e^{-2pq} \qquad ,p=cs;\ (O_2)$$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_1^d B_n(e^{-nsq}-e^{nsq})+\frac{\pi}{4}(e^{pq}+e^{-pq})\sum_{d+1}^c B_n\,e^{-nsq}\\&=\frac{\pi}{4}(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^c B_n\,e^{-nsq}-\frac{\pi}{4}e^{pq}\sum_0^d B_n\,e^{-nsq}-\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^d B_n\,e^{nsq}\end{aligned}\right\}\ ,p=ds+p',\ p'<s,d<c;\ \ldots\ldots (O_3)$$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_1^{d-1} B_n(e^{-nsq}-e^{nsq})+\frac{\pi}{4}B_d\,e^{-2pq}+\frac{\pi}{4}(e^{pq}+e^{-pq})\sum_{d+1}^c B_n\,e^{-nsq}\\&=\frac{\pi}{4}(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^c B_n e^{-nsq}-\frac{\pi}{4}e^{pq}\sum_0^{d-1} B_n\,e^{-nsq}-\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^{d-1} B_n\,e^{nsq}-\frac{\pi}{4}B_d\end{aligned}\right\}\ ,p=ds,\ d<c;\ \ldots (O_4)$$

Dans ces formules les sommations ont subi diverses transformations afin de rendre le zéro leur point de départ commun. Dans les équations (L_1), (L_2), (L_3), (L_4) et (N) le premier terme détaché, qui est fourni par l'équation générale (A), et qui est respectivement

$$\frac{\pi}{4}A_0\,e^{-pq} \text{ et } -\frac{1}{2}A_0\left[e^{pq}\,Ei.(-p\,q)+e^{-pq}\,Ei.\,(p\,q)\right]$$

peut être censé comme étant produit par la valeur que prennent, lorsque n devient égal à zéro, la sommation dans les formules (L_1), (L_2), (L_3), (L_4) et les deux sommations de l'équation (N), et dès-lors il est admis dans ces sommations en les faisant commencer à la limite inférieure zéro au lieu de la limite l'unité. Dans les formules (M), (O_1) et (O_2) et dans les premiers termes des formules (O_3), (O_4) au lieu de l'unité le zéro est pris pour limite inférieure

de la sommation, puisque le terme à ajouter respectivement pour n égal à zéro est identiquement nul, et n'a donc aucune influence sur la valeur de l'intégrale. De plus, dans les équations (L_3), (O_3) les sommations qui s'étendent de $d+1$ jusques à c ont été décomposées dans la différence de deux autres, qui vont respectivement depuis o à c et depuis o à d; tandis que dans les formules (L_4), (O_4) ces mêmes sommations de $d+1$ à c sont réduites à trois parties, savoir une sommation de o à c, à laquelle il faut soustraire une autre sommation de o à $d-1$, et puis encore le terme correspondant à la valeur d de n. La nécessité d'une telle division dans le cas actuel, n'a plus besoin de preuve, après ce qui a été observé à ce sujet dans les discutions précédentes.

Enfin à l'égard de ces mêmes formules (L_4), (O_4) indiquons que ce terme détaché, qui est respectivement $\frac{\pi}{4} A_d$ ou $-\frac{\pi}{4} B_d$ peut être accueilli dans chaque sommation sans distinction, pourvu que l'on étende la sommation respective de zéro à d, au lieu de la prendre depuis zéro jusques à $d-1$.

5. Ces vingt-trois formules (A) à (O_4) constituent autant de théorèmes différents à l'aide desquels le problème concernant la réduction de cette classe d'intégrales définies est complètement résolu, et par lesquels il est subvenu convenablement aux divers cas qui peuvent s'offrir auprès des suppositions spéciales. Mais ces cas, comme il arrive aisément, ont été bien des fois perdus de vue, quoiqu'ici pourtant les résultats différents entre eux nous l'apprennent, qu'en général il faut bien discerner ces cas divers, bienqu'il puisse arriver aussi qu'une telle distinction exacte des cas spéciaux n'ait pas toujours d'influence; de cette dernière observation les formules précédentes (C) à (G), (K) (M) et (N) témoignent par exemple.

Les théorèmes trouvés sont donc très-propres pour l'évaluation des intégrales définies qui sont tellement constituées qu'elles peuvent se réduire à quelqu'une des formes précédentes.

II. APPLICATION DE CES THÉORÈMES LORSQU'ON PREND $Cos.^a x$, $x\,Cos.^a x$, $Sin.^a x$, $x\,Sin.^a x$ POUR $F(x)$.

6. Nous appliquerons à présent les théorèmes trouvés à l'étude des intégrales définies mentionnées, c'est-à-dire où $F(x)$ est de la forme très-simple, $Cos.^a x$, $x\,Cos.^a x$, $Sin.^a x$, $x\,Sin.^a x$. A cet effet nous poserons en premier lieu:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x) &= Cos.^a x.\, Cos.\, a\, x = 2^{-a}\left\{1+\sum_1^a \binom{a}{n} Cos.\, 2\, n\, x\right\}\\ \varphi_2(x) &= Cos.^a x.\, Sin.\, a\, x = 2^{-a}\sum_1^a \binom{a}{n} Sin.\, 2\, n\, x\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (l)$$

où $\binom{a}{n}$ est la dénotation connue du n ième coefficient du binôme élevé à la puissance a ième. Puisque c est égal ici à a et que donc il reste fini, toutes les séries dans (a), (A) et (B) et dans les formules, que l'on en a déduites, sont finies aussi, et il n'y a pas lieu d'instituer une recherche particulière à l'égard de la convergence de ces séries. En employant les équations générales (A) et (B) on voit de suite que

$$s = 2\,,\, A_n = B_n = 2^{-a}\binom{a}{n}\,,\, A_0 = 2^{-a};$$

et dès-lors les formules (C), (D), (E), (E_1), et (F) donnent, lorsqu'on prend

$$\varphi'_1(x) = Cos.^{a-1} x.\, Cos.\, \{(a-1)\,x\}$$

dans l'équation (E_1):

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Cos.\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = 2^{-a}\frac{\pi}{2\,q}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} = \frac{\pi}{q} 2^{-a-1}(1+e^{-2q})^a \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Sin.\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q}\sum_1^a \binom{a}{n}\left\{e^{-2nq}\, Ei.\,(2\,n\,q) - e^{2nq}\, Ei.\,(-2\,n\,q)\right\} \ldots (2)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Cos.\, a\, x}{q^2+x^2}\, x\, d\, x = \infty \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{2\, Cos.^a x.\, Cos.\, a\, x - Cos.^{a-1} x.\, Cos.\{(a-1)x\}}{q^2+x^2}\, x\, d\, x = -2^{-a}\sum_1^a \binom{a}{n}\left\{e^{2nq}\, Ei.\,(-2\,n\,q) + \right.$$

$$\left. + e^{-2qn}\, Ei.\,(2\,n\,q)\right\} + 2^{-a}\sum_1^{a-1}\binom{a-1}{n}\left\{\begin{aligned}&e^{2nq}\, Ei.\,(-2\,n\,q)\\ &+ e^{-2nq}\, Ei.\,(2\,n\,q)\end{aligned}\right\} .(4)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Sin.\, a\, x}{q^2+x^2}\, x\, d\, x = 2^{-a}\frac{\pi}{2}\sum_1^a \binom{a}{n} e^{-2nq} = 2^{-a-1}\pi\left\{-1+(1+e^{-2q})^a\right\} \ldots (5)$$

La formule (4) peut être réduite à une forme plus simple: car on a premièrement

$$2\, Cos.^a x.\, Cos.\, a\, x - Cos.^{a-1} x.\, Cos.\{(a-1)\,x\} = Cos.^{a-1} x.\, Cos.\{(a+1)\,x\},$$

et encore

$$\binom{a}{n} - \binom{a-1}{n} = \binom{a-1}{n-1};$$

de sorte qu'on obtient:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{a-1} x. Cos. \{(a+1)x\}}{q^2+x^2} x\,dx = -2^{-a}\{e^{2aq} Ei.(-2aq) + e^{-2aq} Ei.(2aq)\}$$

$$-2^{-a}\sum_1^{a-1}\binom{a-1}{n-1}\{e^{2nq} Ei.(-2nq) + e^{-2nq} Ei(2nq)\} \quad . \quad . \quad (6)$$

L'emploi de la formule goniométrique précédente auprès de l'intégrale (I) donne encore:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{a-1} x. Cos. \{(a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-a+1}\frac{\pi}{2q}(1+e^{-2q})^a - 2^{-a+1}\frac{\pi}{2q}(1+e^{-2q})^{a-1}$$

$$= 2^{-a}\frac{\pi}{q} e^{-2q}(1+e^{-2q})^{a-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

De même l'on a

$$Cos.^{a-1} x. Sin. \{(a+1)x\} = 2\, Cos.^a. Sin. a x - Cos.^{a-1} x. Sin. \{(a-1)x\};$$

et les formules (2) et (5) donnent à l'aide de cette formule de réduction:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{a-1} x. Sin. \{(a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a}}{q}\sum_1^a\binom{a}{n}\{e^{-2nq} Ei.(2nq) - e^{2nq} Ei.(-2nq)\}$$

$$-\frac{2^{-a}}{q}\sum_1^{a-1}\binom{a-1}{n}\{e^{-2nq} Ei.(2nq) - e^{2nq} Ei.(-2nq)\}$$

$$= \frac{2^{-a}}{q}\{e^{-2aq}Ei.(2aq) - e^{2aq}Ei.(-2aq)\} + \frac{2^{-a}}{q}\sum_1^{a-1}\binom{a-1}{n-1}\{e^{-2nq}Ei.(2nq) - e^{2nq}Ei.(-2nq)\}. (8)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{a-1} x. Sin. \{(a+1)x\}}{q^2+x^2} x dx = 2^{-a}\pi\{-1+(1+e^{-2q})^a\} - 2^{-a+1}\frac{\pi}{2}\{-1+(1+e^{-2q})^{a-1}\}$$

$$= 2^{-a}\pi e^{-2q}(1+e^{-2q})^{a-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

7. Lorsqu'on substitue les fonctions $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ des équations (l) dans les formules (G) jusques à (K), ces substitutions donnent lieu successivement aux formules suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos. a x. Sin. p x dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-2}}{q} e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left[e^{2nq}Ei.\{q(p-2n)\} + e^{-2nq}Ei.\{q(p+2n)\}\right]$$

$$-\frac{2^{-a-2}}{q} e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left[e^{2nq}Ei.\{-q(p+2n)\} + e^{-2nq}Ei.\{-q(p-2n)\}\right]. (10)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\,Sin.\,a x.\,Sin.\,p x\,d x}{q^2+x^2} &= 2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left(e^{2nq}-e^{-2nq}\right)\\ &= 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\left\{(1+e^{2q})^a-(1+e^{-2q})^a\right\} = 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}(e^{2aq}-1)(1+e^{-2q})^a\end{aligned}\right\}, p \geqq 2a; \quad \ldots (11$$

$$\left.\begin{aligned}&= 2^{-a}\frac{\pi}{4q}(e^{pq}-e^{-pq})\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\\ &=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^{pq}-e^{-pq})(1+e^{-2q})^a-2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\end{aligned}\right\}, p=2d+p', \; p'<2, d<a. \quad \ldots (12)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\,Cos.\,a x.\,Cos.\,p x\,d x}{q^2+x^2} &= 2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left(e^{2nq}+e^{-2nq}\right)\\ &= 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\left\{(1+e^{2q})^a+(1+e^{-2q})^a\right\} = 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}(e^{2aq}+1)(1+e^{-2q})^a\end{aligned}\right\}, p \geqq 2a; \quad \ldots (13$$

$$\left.\begin{aligned}&= 2^{-a}\frac{\pi}{4q}(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\\ &=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^{pq}+e^{-pq})(1+e^{-2q})^a-2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\end{aligned}\right\}, p=2d+p', \; p'<2, d<a; \quad \ldots (14)$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{Cos.^a x\, Sin.a x.Cos.p x d x}{q^2+x^2} = &-\frac{2^{-a-2}}{q}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left[e^{2nq}Ei.\{q(p-2n)\}-e^{-2nq}Ei.\{q(p+2n)\}\right]\\ &-\frac{2^{-a-2}}{q}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left[e^{2nq}Ei.\{-q(p+2n)\}-e^{-2nq}Ei.\{-q(p-2n)\}\right]. \quad (15)\end{aligned}$$

En prenant la somme et la différence de (15) et de (10) on obtient:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\,Sin.\,\{(a+p)\,x\}\,d x}{q^2+x^2} = &\frac{2^{-a-1}}{q}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}\,Ei.\,\{q\,(p+2\,n)\} -\\ &-\frac{2^{-a-1}}{q}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{2nq}\,Ei.\,\{-q\,(p+2\,n)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\,Sin.\,\{(a-p)\,x\}\,d x}{q^2+x^2} = &-\frac{2^{-a-1}}{q}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{2nq}\,Ei.\,\{q\,(p-2\,n)\} +\\ &+\frac{2^{-a-1}}{q}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}\,Ei.\{-q(p-2n)\}\end{aligned}$$

Il s'ensuit de la seconde expression, que la première vaut encore pour une valeur négative de p. Prenons donc dans cette intégrale $a+p=r$, $p=r-a$,

alors on a pour chaque valeur positive de r (la valeur a exceptée), puisque p est tout-à-fait arbitraire pourvu qu'il soit plus grand que zéro:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Sin.\, r\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q} e^{(a-r)q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} Ei.\, \{q(r-a+2n)\}$$
$$-\frac{2^{-a-1}}{q} e^{(r-a)q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq} Ei.\, \{q(a-r-2n)\} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

Lorsqu'on suppose ici successivement $r = 2a$ et $r = 3a$, on a

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Sin.\, 2\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q} e^{-aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} Ei.\, \{q(a+2n)\}$$
$$-\frac{2^{-a-1}}{q} e^{aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq} Ei.\, \{-q(a+2n)\} \ldots\ldots\ldots (17)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Sin.\, 3\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q} e^{-2aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} Ei.\, \{2q(a+n)\}$$
$$-\frac{2^{-a-1}}{q} e^{2aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq} Ei.\, \{-2q(a+n)\} \ldots\ldots\ldots (18)$$

Quand on prend aussi la somme et la différence des formules (13) et (11), et de même des formules (14) et (12), il vient:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Cos.\, \{(a+p)x\}\, dx}{q^2+x^2} &= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{-pq}(1+e^{-2q})^a \qquad , p \geqq 2a;\\
&= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{-pq}(1+e^{-2q})^a \qquad , p = 2d+p',\ p'<2, d<a\\
\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Cos.\, \{(a-p)x\}\, dx}{q^2+x^2} &= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{-pq} e^{2aq}(1+e^{-2q})^a \\
&= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{(2a-p)q}(1+e^{-2q})^a \qquad \Big\}, p \geqq 2a;\\
= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{pq}(1+e^{-2q})^a &- 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{pq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq}\\
&+ 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{-pq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} \qquad \Big\}, p=2d+p',\ p'<2, d<a;
\end{aligned}\right\} \ldots (m)$$

La première et troisième de ces équations donnent pour $p = 2a$ — car pour cette valeur de p elles seules valent, tandis que les autres ne permettent pas une telle supposition —

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos. 3\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}\,e^{-2aq}\,(1+e^{-2q})^a \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos.\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}\,(1+e^{-2q})^a.$$

On a déjà trouvé cette dernière formule, dans nos recherches antérieures, form. (1).

Pour $p=a$ au contraire les deuxième et quatrième des formules (m) valent seulement avec exclusion des autres valeurs. On a directement

pour $2\,d=a$, et $p'=0$,

ou $2\,d=a-1$, et $p'=1$:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos. 2\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}\,e^{-aq}\,(1+e^{-2q})^a \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. d x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{aq}(1+e^{-2q})^a - 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} + 2^{a-1}\frac{\pi}{q}e^{-aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}.$$

Mais puisque toujours $\binom{a}{n}=\binom{a}{a-n}$ on a ici:

$$e^{-aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} = e^{aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-(a-n)2q} = e^{aq}\sum_a^{a-d}\binom{a}{a-n} e^{-2nq} = e^{aq}\sum_a^{a-d}\binom{a}{n} e^{-2nq}$$

et

$$-e^{aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} = -e^{aq}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} + e^{aq}\sum_{d+1}^a \binom{a}{n} e^{-2nq} = -e^{aq}(1+e^{-2q})^a + e^{aq}\sum_{d+1}^a \binom{a}{n} e^{-2nq},$$

et donc aussi:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{aq}\left\{\sum_{d+1}^a \binom{a}{n} e^{-2nq} + \sum_{a-d}^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\right\}.$$

Si l'on a à présent $2\,d=a$, ou $2\,d=a-1$, il s'ensuit respectivement:

$$\sum_{d+1}^a \binom{a}{n} e^{-2nq} + \sum_{a-d}^a \binom{a}{n} e^{-2nq} = \sum_{d+1}^{2d} \binom{a}{n} e^{-2nq} + \sum_{d}^{2d} \binom{a}{n} e^{-2nq} = \binom{a}{d} e^{-2dq} + 2\sum_{d+1}^{2d} \binom{a}{n} e^{-2nq},$$

$$\text{ou} = \sum_{d+1}^{2d+1} \binom{a}{n} e^{-2nq} + \sum_{d+1}^{2d+1} \binom{a}{n} e^{-2nq} = 2\sum_{d+1}^{2d+1} \binom{a}{n} e^{-2nq}.$$

Les résultats diffèrent donc essentiellement, selon que $2\,d$ est égal à a ou à $a+1$, d'où $a=2\,d$ ou $a=2\,d+1$, c'est-à-dire selon que a est pair ou impair; on a donc dans ces deux cas:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a} x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}e^{2aq}\left\{\binom{2\,a}{a}e^{-2aq}+2\sum_{a+1}^{2a}\binom{2\,a}{n}e^{-2nq}\right\}$$

$$= 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\binom{2\,a}{a}+2^{-2a}\frac{\pi}{q}e^{2aq}\sum_{a+1}^{2a}\binom{2\,a}{n}e^{-2nq}$$

$$= 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\binom{2\,a}{a}+2^{-2a}\frac{\pi}{q}\sum_{a+1}^{2a}\binom{2\,a}{n}e^{-2(n-a)q}$$

$$= 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\binom{2\,a}{a}+2^{-2a}\frac{\pi}{q}\sum_{1}^{a}\binom{2\,a}{n+a}e^{-2nq}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a-1} x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-2a}\frac{\pi}{q}e^{(2a-1)q}\,2\sum_{a}^{2a-1}\binom{2\,a-1}{n}e^{-2nq}$$

$$= 2^{-2a+1}\frac{\pi}{q}\sum_{a}^{2a-1}\binom{2\,a-1}{n}e^{-(2n-2a+1)q} = 2^{-2a+1}\frac{\pi}{q}\sum_{0}^{a-1}\binom{2\,a-1}{n+a}e^{-(2n+1)q}\;. \quad (22)$$

Ensuite les deux premières des équations (m) nous apprennent, que pour $a+p=r$ la valeur de l'intégrale ne change pas pour chaque r, qui soit plus grand que a: tandis que la dernière de ces mêmes équations pour $a-p=r$ nous fournit la valeur de l'intégrale aussi-longtemps que r reste plus petit que a: alors on a $2\,d=p-p'=(a-r)-p'$, c'est-à-dire que d est le plus grand nombre entier qui soit compris dans $\frac{1}{2}\,(a-r)$, où donc p' peut être une quantité positive, toujours moindre que deux, mais qui peut très-bien aussi dans quelque cas spécial se réduire à zéro. Cela nous fournit les formules:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Cos.\,r\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-(r-a)q}(1+e^{-2q})^a = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-rq}(e^q+e^{-q})^a,\, r>a;\,. \quad (23)$$

$$= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{(a-r)q}(1+e^{-2q})^a - 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{(a-r)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq} + 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-(a-r)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}$$

$$= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-rq}(e^q+e^{-q})^a - 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{(a-r)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq} + 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{(r-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq},\, r<a; \quad (24)$$

où d est le plus grand nombre dans $\frac{1}{2}\,(a-r)$.

Si l'on veut prendre $p=1$ dans les équations (m), il faut faire usage de la deuxième et quatrième de ces formules, où alors d est zèro et p' l'unité; par suite:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\,Cos.\,\{(a+1)\,x\}\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-q}(1+e^{-2q})^a\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos. \{(a-1)x\}\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^q (1+e^{-2q})^a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Prenons dans l'intégrale (1) $2a$ pour a, dans (25) $2a-1$ pour a, et dans (26) $2a+1$ pour a, l'on a:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a}x.Cos.2axdx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q}2^{-2a-1}(1+e^{-2q})^{2a},\ \int_0^\infty \frac{Cos.^{2a-1}x.Cos.2axdx}{q^2+x^2} = 2^{-2a}\frac{\pi}{q}e^{-q}(1+e^{-2q})^{2a-1}.$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1}x.Cos.2axdx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}e^q (1+e^{-2q})^{2a+1}.$$

Lorsqu'on combine celles-ci respectivement avec les formules (21) (22) et (22) (pour $a+1$ au lieu de $2a-1$) par voie d'addition et de soustraction on trouve:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a} x. Cos.^2\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\left\{\binom{2a}{a} + (1+e^{-2q})^{2a} + 2\sum_1^a \binom{2a}{n+a} e^{-2nq}\right\} \quad (27)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a} x. Sin.^2\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\left\{\binom{2a}{a} - (1+e^{-2q})^{2a} + 2\sum_1^a \binom{2a}{n+a} e^{-2nq}\right\} \quad (28)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a-1} x\ Cos.^2\, a x d x}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left\{e^{-q}(1+e^{-2q})^{2a-1} + 2\sum_0^{a-1} \binom{2a-1}{n+a} e^{-(2n+1)q}\right\}. \quad (29)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a-1} x. Sin.^2\, a x d x}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left\{-e^{-q}(1+e^{-2q})^{2a-1} + 2\sum_0^{a-1} \binom{2a-1}{n+a} e^{-(2n+1)q}\right\}. \quad (30)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1} x. Cos.^2\, a x d x}{q^2+x^2} = 2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}\left\{e^{q}(1+e^{-2q})^{2a+1} + 2\sum_0^{a} \binom{2a+1}{n+a+1} e^{-(2n+1)q}\right\}. \quad (31)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1} x. Sin.^2\, a x d x}{q^2+x^2} = 2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}\left\{-e^{q}(1+e^{-2q})^{2a+1} + 2\sum_0^{a} \binom{2a+1}{n+a+1} e^{-(2n+1)q}\right\}. \quad (32)$$

Afin d'obtenir encore les formules, qui sont analogues aux intégrales (25) et (26), il faut supposer successivement $r = a+1$ et $r = a-1$ dans l'équation (16), d'où résultent les deux suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Sin. \{(a+1)x\}\, dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q} e^{-q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\, Ei. \{q(2n+1)\} -$$

$$- \frac{2^{-a-1}}{q} e^{q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\, Ei. \{-q(2n+1)\} \ldots . \quad (33)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Sin.\, \{(a-1)\,x\}\, d\,x}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q} e^q \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\, Ei.\, \{q\,(2\,n-1)\} -$$
$$- \frac{2^{-a-1}}{q} e^{-q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\, Ei.\, \{-q\,(2\,n-1)\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (34)$$

8. Encore les formules (L) jusques à (O) donnent pour la même supposition (l):

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Cos.\, a\, x.\, Sin.\, p\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}\pi\, e^{-pq} \sum_0^a \binom{a}{n} (e^{2nq}+e^{-2nq})$$
$$= 2^{-a-2}\pi e^{-pq}\{(1+e^{2q})^a+(1+e^{-2q})^a\} = 2^{-a-2}\pi\, e^{-pq}(1+e^{2aq})(1+e^{-2q})^a\;, p>2a; \; . \; . (35)$$

$$\left.\begin{aligned} &= 2^{-a-2}\pi(e^{-pq}-e^{pq})\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} + 2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} + 2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} \\ &= 2^{-a-2}\pi(e^{-pq}-e^{pq})(1+e^{-2q})^a + 2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} + 2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &p=2d+p', \\ &p<2, d<a; \\ &\; . \; . \; . \; (36) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &= 2^{-a-2}\pi(e^{-pq}-e^{pq})\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} + 2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^{d-1} \binom{a}{n} e^{-2nq} + 2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} \\ &= 2^{-a-2}\pi(e^{-pq}-e^{pq})(1+e^{-2q})^a + 2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^{d-1} \binom{a}{n} e^{-2nq} + 2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &, p = 2\,d, \\ &d < a; \\ &\; . \; . \; . \; (37) \end{aligned}$$

tandis que que l'on a pour $p = 2\,a$:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Cos.\, ax.\, Sin.\, 2\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}\pi\, e^{-2aq}\sum_0^{a-1} \binom{a}{n} (e^{2nq}+e^{-2nq}) + 2^{-a-2}\pi\, e^{-4aq}$$
$$= 2^{-a-2}\pi\, e^{-2aq}\,\{(1+e^{2q})^a - e^{2aq} + (1+e^{-2q})^a - e^{-2aq}\} + 2^{-a-2}\pi\, e^{-4aq}$$
$$= 2^{-a-2}\pi\,\{(1+e^{+2aq})\,(1+e^{-2q})^a - 1\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (38)$$

Ensuite:

$$\int_0^\infty \frac{x Cos.^a x. Sin. ax. Sin. px dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-2} e^{pq} \sum_0^a \binom{a}{n} \left[e^{2nq} Ei.\{-q(p+2n)\} - e^{-2nq} Ei.\{-q(p-2n)\}\right]$$
$$- 2^{-a-2}\, e^{-pq} \sum_0^a \binom{a}{n} \left[e^{2nq}\, Ei.\, \{q\,(p-2\,n)\} - e^{-2nq}\, Ei.\, \{q\,(p+2\,n)\}\right]. \; (39)$$

$$\int_0^\infty \frac{x Cos.^a x. Cos. ax. Cos. px dx}{q^2+x^2} = -2^{-a-2} e^{pq} \sum_0^a \binom{a}{n} \left[e^{2pq} Ei.\{-q(p+2n)\} + e^{-2nq} Ei.\{-q(p-2n)\}\right]$$
$$- 2^{-a-2}\, e^{-pq} \sum_0^a \binom{a}{n} \left[e^{2nq}\, Ei.\, \{q\,(p-2\,n)\} + e^{-2nq}\, Ei.\, \{q\,(p+2\,n)\}\right]. \; (40)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x \, Cos.^a x. Sin. a x. Cos. p x \, dx}{q^2+x^2} &= 2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^a \binom{a}{n}(e^{-2nq}-e^{2nq}) \\ &= 2^{-a-2}\pi e^{-pq}\{(1+e^{-2q})^a-(1+e^{2q})^a\} = 2^{-a-2}\pi e^{-pq}(1-e^{2aq})(1+e^{-2q})^a\end{aligned}\right\} ,p>2a; \quad \ldots (41)$$

$$\left.\begin{aligned}&= 2^{-a-2}\pi(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq} \\ &= 2^{-a-2}\pi(e^{pq}+e^{-pq})(1+e^{-2q})^a-2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\end{aligned}\right\} ,p=2d+p', \; p'<2, d<a; \quad \ldots (42)$$

$$\left.\begin{aligned}&= 2^{-a-2}\pi(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^{d-1}\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq} \\ &= 2^{-a-2}\pi(e^{pq}+e^{-pq})(1+e^{-2q})^a-2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^{d-1}\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\end{aligned}\right\} ,p=2d, \; d<a; \quad . (43)$$

mais pour le cas de $p = 2a$, on a de nouveau:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x \, Cos.^a x. Sin. a x. Cos. 2 a x \, dx}{q^2+x^2} &= 2^{-a-2}\pi e^{-2aq}\sum_0^{a-1}\binom{a}{n}(e^{-2nq}-e^{2nq}) + 2^{-a-2}\pi e^{-4aq} \\ &= 2^{-a-2}\pi e^{-2aq}\{(1+e^{-2q})^a-e^{-2aq}-(1+e^{2q})^a+e^{2aq}\}+2^{-a-2}\pi e^{-4aq} \\ &= 2^{-a-2}\pi\{(-1+e^{-2aq})(1+e^{-2q})^a+1\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (44)\end{aligned}$$

La somme et la différence des deux intégrales (40) et (39) nous fournissent encore :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x \, Cos.^a x. Cos. \{(a+p)x\} \, dx}{q^2+x^2} &= -2^{-a-1}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{2nq}Ei.\{-q(p+2n)\} - \\ &\quad - 2^{-a-1}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}Ei.\{q(p+2n)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x \, Cos.^a x. Cos. \{(a-p)x\} \, dx}{q^2+x^2} &= -2^{-a-1}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}Ei.\{-q(p-2n)\} - \\ &\quad - 2^{-a-1}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{2nq}Ei.\{q(p-2n)\}\end{aligned}$$

Puisque la seconde expression devient identiquement égale à la première, lorsqu'on y suppose $-p$ au lieu de p, cette première vaut aussi pour des valeurs négatives de p. Prenons donc $a+p=r$, $p=r-a$, alors pour une valeur positive quelconque de r (sauf la valeur a parceque p doit toujours rester plus grand que zéro) on aura en général, puisque p est tout-a-fait arbitraire:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Cos. r x\,d x}{q^2+x^2} = -\,2^{-a-1}\,e^{(r-a)q}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\,Ei.\,\{q(a-r-2n)\}$$

$$-\,2^{-a-1}\,e^{(a-r)q}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\,Ei.\,\{q(r-a+2n)\}\;\ldots\ldots\;(45)$$

Mettez-y successivement $r=0$ et $r=2a$, alors il vient:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x\,d x}{q^2+x^2} = -\,2^{-a-1}\,e^{-aq}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\,Ei.\,\{q(a-2n)\}$$

$$-\,2^{-a-1}\,e^{aq}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\,Ei.\,\{q(2n-a)\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(46)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Cos. 2\,a x\,d x}{q^2+x^2} = -\,2^{-a-1}\,e^{aq}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\,Ei.\,\{-q(a+2n)\}$$

$$-\,2^{-a-1}\,e^{-aq}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\,Ei.\,\{q(a+2n)\}\;\ldots\ldots\ldots\;(47)$$

équations, dont la somme et la différence donnent:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Cos.^2\,a x\,d x}{q^2+x^2} = -2^{-a-2}e^{aq}\sum_0^a \binom{a}{n}\left[e^{2nq}Ei.\{-q(a+2n)\}+e^{-2nq}Ei.\{-q(a-2n)\}\right]$$

$$+\,2^{-a-2}\,e^{-aq}\sum_0^a \binom{a}{n}\left[e^{-2nq}\,Ei.\,\{q(a+2n)\}+e^{2nq}\,Ei.\,\{q(a-2n)\}\right].\;(48)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Sin.^2\,a x\,d x}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}e^{aq}\sum_0^a \binom{a}{n}\left[e^{2nq}Ei.\{-q(a+2n)\}-e^{-2nq}Ei.\{-q(a-2n)\}\right]$$

$$+\,2^{-a-2}\,e^{-aq}\sum_0^a \binom{a}{n}\left[e^{-2nq}\,Ei.\,\{q(a+2n)\}-e^{2nq}\,Ei.\,\{q(a-2n)\}\right].\;(49)$$

L'on aurait pu déduire ces intégrales directement en supposant $p=a$ dans les formules (40) et (39).

Encore l'équation (45) donne pour les suppositions $r=3a$, $r=a-1$, et $r=a+1$, successivement:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Cos. 3\,a x\,d x}{q^2+x^2} = -\,2^{-a-1}\,e^{2aq}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\,Ei.\,\{-2q(a+n)\}$$

$$-\,2^{-a-1}\,e^{-2aq}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\,Ei.\,\{2q(a+n)\}\;\ldots\ldots\;(50)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Cos.\left\{(a-1)\,x\right\}\, dx}{q^2+x^2} = -\,2^{-a-1}\, e^{-q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\, Ei.\left\{-q\,(2n-1)\right\}$$

$$-\,2^{-a-1}\, e^{q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\, Ei.\left\{q\,(2n-1)\right\} \quad \ldots . \; (51)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Cos.\left\{(a+1)\,x\right\}\, dx}{q^2+x^2} = -\,2^{-\hat{a}-1}\, e^{q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\, Ei.\left\{-\,q\,(2n+1)\right\}$$

$$-\,2^{-a-1}\, e^{-q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\, Ei.\left\{q\,(2n+1)\right\} \quad \ldots .. \; (52)$$

et en prenant la somme et la différence des intégrales (38) et (44):

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Sin. 3\, a x\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\pi\, e^{-2aq}\,(1+e^{-2q})^a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (53)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Sin. a x\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\pi\left\{(1+e^{-2q})^a-1\right\}$$

dont la dernière intégrale a déjà été déduite précédemment sous la formule (5).

De même la combinaison des formules (41) et (35), (42) et (36), (43) et (37) par voie d'addition et de soustraction nous fournit:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Sin.\left\{(a+p)x\right\} dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\pi\, e^{-pq}\,(1+e^{-2q})^a \qquad ,\, p>2a;$$

$$= 2^{-a-1}\pi\, e^{-pq}\,(1+e^{-2q})^a \qquad ,\, p=2d+p',\; p'<2,\, d<a;$$

$$= 2^{-a-1}\pi\, e^{-pq}\,(1+e^{-2q})^a \qquad ,\, p=2d,\, d<a;$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Sin.\left\{(a-p)x\right\} dx}{q^2+x^2} = -\,2^{-a-1}\pi\, e^{-pq}\, e^{2aq}\,(1+e^{-2q})^a$$

$$= -\,2^{-a-1}\pi\, e^{-pq}\,(1+e^{2q})^a \qquad \Bigg\}\, ,\, p>2a;$$

$$= 2^{-a-1}\pi\, e^{pq}\,(1+e^{-2q})^a - 2^{-a-1}\pi\, e^{pq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq}$$

$$-\,2^{-a-1}\pi\, e^{-pq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} \qquad \Bigg\}\, ,\, p=2d+p',\; p'<2,\, d<a;$$

$$= 2^{-a-1}\pi\, e^{pq}\,(1+e^{-2q})^a - 2^{-a-1}\pi\, e^{pq} \sum_0^{d-1} \binom{a}{n} e^{-2nq}$$

$$-\,2^{-a-1}\pi\, e^{-pq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} \qquad \Bigg\}\, ,\, p=2d,\, d<a; \quad \ldots (n)$$

Afin de pouvoir prendre le p égal à a, il faut employer la deuxième ou la troisième valeur de chaque intégrale dans les formules (n), et cela selon que a est impair ou pair; car dans le premier cas on doit avoir l'unité pour p', dans le second cas p' doit être zéro. En premier lieu les deuxième et troisième de ces équations (n) donnent chacune:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Sin.\,2\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\pi\,e^{-aq}\,(1+e^{-2q})^a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Si l'on suppose p égal à a dans la cinquième des formules (n), on doit avoir l'unité pour p', de sorte que a ou p devienne $2\,d+1$, c'est-à-dire impair. Au contraire l'équation sixième peut s'employer pour p égal à a; alors a ou p devient $2\,d$, un nombre pair. L'on trouve donc dans ces deux cas pour la valeur des intégrales qui correspondent à la valeur a de p, lorsqu'on lui ôte le facteur commun $2^{-a-1}\pi$, qui se trouve auprès de tous les termes:

$$e^{aq}\,(1+e^{-2q})^a - e^{aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} - e^{-aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq},$$

$$e^{aq}\,(1+e^{-2q})^a - e^{aq}\sum_0^{d-1} \binom{a}{n} e^{-2nq} - e^{-aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}.$$

Dans la première forme on a

$$e^{-aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} = e^{aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-(a-n)2q} = e^{aq}\sum_a^{a-d} \binom{a}{a-n} e^{-2nq} = e^{aq}\sum_a^{a-d} \binom{a}{n} e^{-2nq};$$

lorsqu'on tient compte de l'identité $\binom{a}{n} = \binom{a}{a-n}$; mais ici a est égal à $2\,d+1$, donc $a-d$ à $d+1$, de sorte que les deux sommations, qui se trouvent dans cette formule, deviennent

$$-e^{aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} - e^{aq}\sum_a^{d+1} \binom{a}{n} e^{-2nq} = -e^{aq}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} = -e^{aq}\,(1+e^{-2q})^a.$$

Lorsqu'on y ajoute le premier terme, la valeur totale s'évanouit, comme il doit être nécessairement, car pour la valeur a de p le facteur sous le signe d'intégration $Sin.\,\{(a-p)\,x\}$ devient zéro, de sorte que l'intégrale s'annullit elle-même. La même chose aura donc lieu aussi pour la forme seconde, où a est supposé être pair: là on a de même

$$e^{-aq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} = e^{aq}\sum_a^{a-d} \binom{a}{n} e^{-2nq};$$

mais ici l'on a $a=2d$, donc $a-d=d$; et par suite les deux sommations, qui entrent dans cette forme, donneront:

$$-e^{aq}\sum_0^{d-1}\binom{a}{n}e^{-2nq}-e^{aq}\sum_a^{d}\binom{a}{n}e^{-2nq}=-e^{aq}\sum_0^{a}\binom{a}{n}e^{-2nq}=-e^{aq}(1+e^{-2q})^a,$$

comme il doit être, afin que le terme entier puisse s'évanouir: ceci est donc une vérification des deux formules discutées.

Des trois premières de ces équations (n) il s'ensuit à présent, que pour $a+p=r$, $p=r-a$, leur valeur reste la même pour chaque r, qui reste plus grand que a. Si au contraire on prend $a-p=r$, $p=a-r$, et donc r moindre que a, il faut avoir recours à la sixième ou à la cinquième de ces mêmes formules, et cela selon que r est un nombre entier ou non. On aura donc:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.Sin.rx\,dx}{q^2+x^2}=2^{-a-1}\pi e^{(a-r)q}(1+e^{-2q})^a=2^{-a-1}\pi e^{-rq}(e^q+e^{-q})^a,\quad r>a;\ (55)$$

$$=2^{-a-1}\pi\left\{e^{(a-r)q}(1+e^{-2q})^a-e^{(a-r)q}\sum_0^{d-1}\binom{a}{n}e^{-2nq}-e^{(r-a)q}\sum_0^{d}\binom{a}{n}e^{2nq}\right\}\ ,r<a,\ \text{entier};\ (56)$$

$$=2^{-a-1}\pi\left\{e^{(a-r)q}(1+e^{-2q})^a-e^{(a-r)q}\sum_0^{d}\binom{a}{n}e^{-2nq}-e^{(r-a)q}\sum_0^{d}\binom{a}{n}e^{2nq}\right\}\ ,r<a;\ \text{fractionnaire}.\ (57)$$

où d est le plus grand nombre entier dans $\frac{1}{2}(a-r)$.

Si l'on veut prendre r égal à $a+1$ ou $a-1$, il faut employer respectivement les intégrales (55) et (56), et puisque d est zéro, cela nous fournit les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.Sin.\{(a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2}=2^{-a-1}\pi e^{-(a+1)q}(e^q+e^{-q})^a=2^{-a-1}\pi e^{-q}(1+e^{-2q})^a.\ (58)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.Sin.\{(a-1)x\}\,dx}{q^2+x^2}=2^{-a-1}\pi e^{q}(1+e^{-2q})^a\ \dots\dots\dots\dots\ (59)$$

9. Dans les paragraphes (6) à (8) nous venons de traiter les quatre premières des intégrales mentionnées en tête de cette partie deuxième, et nous en avons discuté chaque fois les cas spéciaux, qui donnaient lieu à quelque observation. La petite table ci-jointe peut servir à offrir un coup d'oeuil sur les résultats acquis; on y a noté les formules qui contiennent chaque cas spécial:

	pour $r=r$,	$=0$,	$=a$,	$=2a$,	$=3a$,	$=a-1$,	$=a+1$,	$=a+2$,
$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos. r x d x}{q^2+x^2}$	23, 24	21, 22	1	20	19	26	25	7,
$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Sin. r x d x}{q^2+x^2}$	16		2	17	18	34	33	8,
$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x. Cos. rxdx}{q^2+x^2}$	45	46	3	47	50	51	52	6,
$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x. Sin. rxdx}{q^2+x^2}$	55, 56, 57		5	54	53	59	58	9.

10. Lorsqu'on prend dans les formules (l) $\frac{\pi}{2}-x$ pour x, l'on a

$$Sin.^a x. Cos. \left\{a\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} = 2^{-a}\left\{1+\sum_1^a \binom{a}{n}(-1)^n Cos. 2nx\right\},$$

$$Sin.^a x. Sin. \left\{a\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} = -2^{-a}\sum_1^a \binom{a}{n}(-1)^n Sin. 2nx.$$

Prenons ensuite $2a$ et $2a+1$ successivement comme valeurs de a, il vient :

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= Sin.^{2a} x. Cos. 2ax = (-1)^a 2^{-2a}\left\{1+\sum_1^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n} Cos. 2nx\right\}\\
\text{ou } &= Sin.^{2a+1}x. Sin.\{(2a+1)x\} = (-1)^a 2^{-2a-1}\left\{1+\sum_1^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n} Cos. 2nx\right\}\\
\varphi_2(x) &= Sin.^{2a}x.\ Sin. 2ax = (-1)^a 2^{-2a}\sum_1^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n} Sin. 2nx\\
\text{ou } &= Sin.^{2a+1}x. Cos.\{(2a+1)x\} = (-1)^{a-1}2^{-2a-1}\sum_1^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n} Sin. 2nx
\end{aligned}\right\}(o)$$

Les deux premières formes se trouvent désignées ici par la fonction $\varphi_1(x)$, les deux dernières au contraire par la fonction $\varphi_2(x)$, parcequ'elles pourront satisfaire la définition respective, qui est contenue dans les équations (a). Dans l'application des formules générales (A) et (B) l'on voit que s a ici partout la valeur 2, et puisque on a respectivement:

$$c = 2a \quad , A_n = (-1)^a 2^{-2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \quad , A_0 = (-1)^a 2^{-2a};$$

$$= 2a+1, A_n = (-1)^a 2^{-2a-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n}, A_0 = (-1)^a 2^{-2a-1};$$

$$= 2a \quad , B_n = (-1)^a 2^{-2a} (-1)^n \binom{2a}{n};$$

$$= 2a+1, B_n = (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n};$$

les formules (C), (D), (E), (E_1) — auprès de la dernière les deux formes de $\varphi_1(x)$ peuvent être tres-bien combinées ici d'une telle manière, que les deux termes A_0 deviennent égaux et que par suite il se détruisent mutuellement — et (F) fournissent donc ici:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Cos. 2ax\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} (1-e^{-2q})^{2a} \quad \ldots \ldots \quad (60)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Sin. \{(2a+1)x\}\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq}$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} (1-e^{-2q})^{2a+1} \quad \ldots \ldots \quad (61)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Sin\, 2ax\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{1}{q} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \{e^{-2nq} Ei.(2nq) - e^{2nq} Ei.(-2nq)\}. \quad (62)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos. \{(2a+1)x\}\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{1}{q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n}$$

$$\{e^{-2nq} Ei.(2nq) - e^{2nq} Ei.(-2nq)\} \quad \ldots \ldots \quad (63)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x. Cos. 2ax\, dx}{q^2+x^2} = \infty \quad \ldots \ldots \quad (64)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a+1} x. Sin. \{(2a+1)x\}\, dx}{q^2+x^2} = \infty \quad \ldots \ldots \quad (65)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x. Cos. 2ax - 2x. Sin.^{2a+1} x. Sin. \{(2a+1)x\}}{q^2+x^2}\, dx =$$

$$(-1)^a 2^{-2a-1} \sum_1^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \{e^{2nq} Ei.(-2nq) + e^{-2nq} Ei.(2nq)\}$$

$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} \sum_1^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \{e^{2nq} Ei.(-2nq) + e^{-2nq} Ei.(2nq)\} \quad (66)$$

$$\int_0^\infty \frac{2\,x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,2\,a\,x + x.\,Sin.^{2a-1}x.\,Sin.\,\{(2\,a-1)\,x\}}{q^2+x^2}\,dx =$$

$$(-1)^a\,2^{-2a}\sum_1^{2a}(-1)^n\binom{2\,a}{n}\left\{e^{2nq}\,Ei.(-2\,n\,q)+e^{-2nq}\,Ei.(2\,n\,q)\right\}$$

$$+(-1)^{a-1}\,2^{-2a}\sum_1^{2a-1}(-1)^n\binom{2\,a-1}{n}\left\{e^{2nq}\,Ei.(-2\,n\,q)+e^{-2nq}\,Ei.(2\,n\,q)\right\}\;.\;(67)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,2\,a\,x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\sum_1^{2a}(-1)^n\binom{2\,a}{n}e^{-2nq}$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\left\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(68)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,\{(2\,a+1)\,x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\sum_1^{2a+1}(-1)^n\binom{2\,a+1}{n}e^{-2nq}$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\left\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}\;.\;.\;(69)$$

De ces formules les intégrales (66) et (67) donnent en premier lieu après la réduction des fonctions goniométriques qui se trouvent sous le signe d'intégration:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,\{(2\,a+2)\,x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-1}\Big[e^{2(2a+1)q}\,Ei.\,\{-2\,q\,(2\,a+1)\}$$

$$+e^{-2(2a+1)q}Ei.\{2q(2a+1)\}+\sum_1^{2a}(-1)^{n-1}\left\{\binom{2a+1}{n}-\binom{2a}{n}\right\}\left\{e^{2nq}Ei.(-2nq)+e^{-2nq}Ei.(2nq)\right\}\Big].(70)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a-1}x.\,Sin.\,\{(2\,a+1)\,x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a}\Big[e^{4aq}\,Ei.\,(-4\,a\,q)+e^{-4aq}\,Ei.(4\,a\,q)$$

$$+\sum_1^{2a-1}(-1)^n\left\{\binom{2\,a}{n}-\binom{2\,a-1}{n}\right\}\left\{e^{2nq}\,Ei.(-2\,n\,q)+e^{-2nq}\,Ei.\,(2\,n\,q)\right\}\Big]\;.\;.\;.\;(71)$$

En appliquant les mêmes équations goniométriques dont on a fait usage ici, c'est-à-dire

$$Sin.^{2a}x.\,Cos.\,2\,a\,x-2\,Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\,\{(2\,a+1)\,x\} = Sin.^{2a}x.\,Cos.\,\{(2\,a+2)\,x\},$$

$$2\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,2\,a\,x+Sin.^{2a-1}x.\,Sin.\,\{(2\,a-1)\,x\} = Sin.^{2a-1}x.\,Sin.\,\{(2\,a+1)\,x\},$$

l'on peut encore tirer des équations (60) et (61) les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Cos.\,\{(2\,a+2)\,x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left\{(1-e^{-2q})^{2a}-(1-e^{-2q})^{2a+1}\right\}$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\frac{\pi}{q}\,e^{-2q}\,(1-e^{-2q})^{2a}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(72)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a-1}x.\,Sin.\{(2a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\{(1-e^{-2q})^{2a}-(1-e^{-2q})^{2a-1}\}$$

$$= (-1)^{a-1}\, 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\, e^{-2q}(1-e^{-2q})^{2a-1} \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

De même on a encore les formules goniométriques analogues:

$$Sin.^{2a}x.\,Sin.\,2ax+2\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\{(2a+1)x\}=Sin.^{2a}x.\,Sin.\{(2a+2)x\},$$

$$-2\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,2ax+Sin.^{2a-1}x.\,Cos.\{(2a-1)x\}=Sin.^{2a-1}x.\,Cos.\{(2a+1)x\};$$

et lorsqu'on les applique respectivement aux intégrales (62) et (65), (68) et (69), on trouve les formules suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.\{(2a+2)x\}\,dx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-1}\Bigg[\sum_1^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}\{e^{-2nq}Ei.(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}$$

$$-\sum_1^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}\{e^{-2nq}Ei.(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}\Bigg]$$

$$=\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-1}\Bigg[e^{-2(2a+1)q}Ei.\{2q(2a+1)\}-e^{2(2a+1)q}Ei.\{-2q(2a+1)\}$$

$$-\sum_1^{2a}(-1)^n\left\{\binom{2a+1}{n}-\binom{2a}{n}\right\}\{e^{-2nq}Ei.(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}\Bigg]. \quad (74)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a-1}x.Cos.\{(2a+1)x\}dx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a}\Bigg[\sum_1^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}\{e^{-2nq}Ei.(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}$$

$$-\sum_1^{2a-1}(-1)^n\binom{2a-1}{n}\{e^{-2nq}Ei.(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}\Bigg]$$

$$=\frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a}\Bigg[e^{-4aq}Ei.(4aq)-e^{4aq}Ei.(-4aq)$$

$$+\sum_1^{2a-1}(-1)^n\left\{\binom{2a}{n}-\binom{2a-1}{n}\right\}\{e^{-2nq}Ei.(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}\Bigg]. \quad (75)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\{(2a+2)x\}\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a}-1-(1-e^{-2q})^{2a+1}+1\}$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\, e^{-2q}(1-e^{-2q})^{2a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a-1}x.Cos.\{(2a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^{a-1}2^{-2a}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a}-1-(1-e^{-2q})^{2a-1}+1\}$$

$$=(-1)^a 2^{-2a}\pi\, e^{-2q}(1-e^{-2q})^{2a-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

11. A présent il nous faut substituer les valeurs de $\varphi_1(x)$ et de $\varphi_2(x)$ des équations (o) dans les formules générales (G) à (K), et cette substitution nous fournit successivement:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x.\,Cos.\,2\,a\,x.\,Sin.\,p\,x}{q^2+x^2}\,d\,x = \frac{(-1)^a}{q}\,2^{-2a-2}\,e^{-pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2\,a}{n}\Big[e^{2nq}\,Ei.\,\{q\,(p-2\,n)\}$$
$$+\;e^{-2nq}\,Ei.\,\{q\,(p+2\,n)\}\Big]$$
$$+\frac{(-1)^{a-1}}{q}\,2^{-2a-2}\,e^{pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}\Big[e^{2nq}Ei.\{-q\,(p+2n)\}+e^{-2nq}\,Ei.\{-q\,(p-2n)\}\Big].\;(78)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x.\,Sin.\{(2a+1)x\}.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^a}{q}\,2^{-2a-3}\,e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}\Big[e^{2nq}Ei.\{q\,(p-2n)\}$$
$$+\;e^{-2nq}\,Ei.\,\{q\,(p+2\,n)\}\Big]$$
$$+\frac{(-1)^{a-1}}{q}\,2^{-2a-3}\,e^{pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}\Big[e^{2nq}Ei.\{-q\,(p+2n)\}+e^{-2nq}Ei.\{-q\,(p-2n)\}\Big].\;(79)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x.\,Sin.\,2\,a\,x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} &= (-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\,e^{-pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}(e^{2nq}-e^{-2nq})\\ &= (-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\,e^{-pq}\,\{(1-e^{2q})^{2a}-(1-e^{-2q})^{2a}\}\\ &= (-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\,e^{-pq}\,(e^{4aq}-1)\,(1-e^{-2q})^{2a}\end{aligned}\right\}\;,\,p \geqq 4\,a;\;\ldots\;(80)$$

$$\left.\begin{aligned}&=(-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}-e^{-pq})\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\\ &\qquad\qquad +\;e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2\,a}{n}\,e^{2nq}\Big]\\ &=(-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}-e^{-pq})\,(1-e^{-2q})^{2a}-e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2\,a}{n}\,e^{-2nq}\\ &\qquad\qquad +\;e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2\,a}{n}\,e^{2nq}\Big]\end{aligned}\right\}\;,\,p = 2\,d+p',\;p'<2,\,d<2a;\;\ldots\ldots\;(81)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x.\,Cos.\,\{(2\,a+1)\,x\}.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =\\ &= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}\,e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2\,a+1}{n}(e^{2nq}-e^{-2nq})\\ &= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}\,e^{-pq}\,\{(1-e^{2q})^{2a+1}-(1-e^{-2q})^{2a+1}\}\\ &= (-1)^a\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}\,e^{-pq}\,(e^{(2a+1)2q}+1)\,(1-e^{-2q})^{2a+1}\end{aligned}\right\}\;,\,p \geqq 4\,a+2\,;\;\ldots\ldots\;(82)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,\{(2a+1)x\}\,.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \\
&= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}-e^{-pq})\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} - \\
&- e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} + e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big] \\
&= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}-e^{-pq})\,(1-e^{-2q})^{2a+1} \\
&- e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} + e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]
\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,p=2d+p', \\ &p'<2,\,d<2a+1; \\ &\dots\dots\dots\dots (83)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Cos.\,2\,a\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}(e^{2nq}+e^{-2nq}) \\
&\qquad = (-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\left\{(1-e^{2q})^{2a}+(1-e^{-2q})^{2a}\right\} \\
&\qquad = (-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\,(e^{4aq}+1)\,(1-e^{-2q})^{2a}
\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,p\geqq 4a; \\ &\dots (84)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&= (-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} - e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\
&\qquad\qquad + e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big] \\
&= (-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\,(1-e^{-2q})^{2a} - e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\
&\qquad\qquad + e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]
\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,p=2d+p', \\ &p'<2,d<2a; \\ &\dots\dots (85)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\,\{(2a+1)x\}\,.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \\
&\qquad = (-1)^a\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}(e^{2nq}+e^{-2nq}) \\
&\qquad = (-1)^a\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\left\{(1-e^{2q})^{2a+1}+(1-e^{-2q})^{2a+1}\right\} \\
&\qquad = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\,(e^{(2a+1)2q}-1)\,(1-e^{-2q})^{2a+1}
\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,p\geqq 4a+2; \\ &\dots\dots (86)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\,\{(2a+1)\,x\}.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \\
&= (-1)^a\, 2^{-2a-3}\,\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} \\
&\quad - e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} + e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big] \\
&= (-1)^a\, 2^{-2a-3}\,\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\,(1-e^{-2q})^{2a+1} \\
&\quad - e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} + e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]
\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,p=2d+p',\\ &p'<2,d<2a+1;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots (87)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.\,2\,a\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \\
&= \frac{(-1)^{a-1}}{q}\,2^{-2a-2}\,e^{-pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}\Big[e^{2nq}\,Ei.\{q(p-2n)\} - e^{-2nq}\,Ei.\{q\,(p+2n)\}\Big] \\
&+ \frac{(-1)^{a-1}}{q}\,2^{-2a-2}\,e^{pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}\Big[e^{2nq}Ei.\{-q(p+2n)\} - e^{-2nq}Ei.\{-q(p-2n)\}\Big].(88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,\{(2a+1)\,x\}.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \\
&= \frac{(-1)^{a}}{q}\,2^{-2a-3}\,e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}\Big[e^{2nq}Ei.\{q(p-2n)\} - e^{-2nq}Ei.\{q(p+2n)\}\Big] \\
&+ \frac{(-1)^{a}}{q}\,2^{-2a-3}\,e^{pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}\Big[e^{2nq}Ei.\{-q(p+2n)\} - e^{-2nq}Ei.\{-q(p-2n)\}\Big].(89)
\end{aligned}$$

Mais ces formules (78) jusqu'à (89) donnent lieu de nouveau aux observations suivantes. En premier lieu, lorsqu'on combine les équations (88) et (78), (79) et (89) par voie d'addition et de soustraction, on obtient successivement:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.\,\{(2a+p)\,x\}\,d\,x}{q^2+x^2} &= \frac{(-1)^a}{q}\,2^{-2a-1}\,e^{-pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\,Ei.\,\{q\,(p+2\,n)\} \\
&+ \frac{(-1)^{a-1}}{q}\,2^{-2a-1}\,e^{pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\,Ei.\{-q(p+2n)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.\,\{(2a-p)\,x\}\,d\,x}{q^2+x^2} &= \frac{(-1)^{a-1}}{q}\,2^{-2a-1}\,e^{-pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\,Ei.\{q\,(p-2\,n)\} \\
&+ \frac{(-1)^a}{q}\,2^{-2a-1}\,e^{pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\,Ei.\{-q\,(p-2\,n)\},
\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.\{(2a+1+p)x\}\,dx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a-2}e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}Ei.\{q(p+2n)\}$$

$$+\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-2}e^{pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}Ei.\{-q(p+2n)\}.$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.\{(2a+1-p)x\}\,dx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-2}e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}Ei.\{q(p-2n)\}$$

$$+\frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a-2}e^{pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}Ei.\{-q(p-2n)\},$$

Or la dernière et la quatrième de ces équations rentrent respectivement dans les formules, qui les précèdent directement, lorsqu'on prend $-p$ au lieu de p: ainsi dans ces dernières, c'est-à-dire la première et la troisième de ces formules, il est permis de supposer p négatif. Prenons alors dans la première intégrale $2a+p=r, p=r-2a$, et dans la troisième au contraire $2a+1+p=r$, $p=r-2a-1$; alors — puisque p est tout-à-fait arbitraire, et seulement supposé plus grand que zéro, de sorte que dans les fonctions $Sin.\ \{(a\pm p)\,x\}$ et $Cos.\ \{(a\pm p)\,x\}$ la distinction entre des valeurs paires ou impaires de a doit être supprimée entièrement — alors il vient pour un r quelconque (exceptées la valeur $2a$ et $2a+1$ de r respectivement) les intégrales suivantes généralement valables:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.r\,x\,dx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-1}e^{(2a-r)q}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}Ei.\{q(r-2a+2n)\}$$

$$+\frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a-1}e^{(r-2a)q}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}Ei.\{q(2a-r-2n)\}\quad .\ (90)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.r\,x\,dx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a-2}e^{(2a+1-r)q}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}Ei.\{q(r-2a-1+2n)\}$$

$$+\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-2}e^{(r-2a-1)q}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}Ei.\{q(2a+1-r-2n)\}\quad .\ .\ .\ (91)$$

La supposition des valeurs $4a$ et $6a$ pour r dans l'intégrale (90), ainsi que des valeurs 0 et $2a$ pour r dans l'autre formule (91), nous donne:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.4a\,x\,dx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-1}\Big[e^{-2aq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}Ei.\{2q(a+n)\}$$

$$-e^{2aq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}Ei.\{-2q(a+n)\}\Big]\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (92)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Sin. 6\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-1} \Big[e^{-4aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} Ei. \{2\,q\,(2\,a+n)\}$$

$$- e^{4aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} Ei. \{-2\,q\,(2\,a+n)\} \Big] \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (93)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-2} \Big[e^{(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{q\,(2\,n-2a-1)\}$$

$$- e^{-(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{q\,(2\,a+1-2\,n)\} \Big] \;.\;.\;.\;.\; (94)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos. 2\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-2} \Big[e^{q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{q\,(2n-1)\}$$

$$- e^{-q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{q\,(1-2\,n)\} \Big] \;.\;.\;.\;.\; (95)$$

L'on peut prendre encore la somme et la différence des deux dernières intégrales (94) et (95) pour obtenir les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos.^2\, a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-3} e^{q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{(a-n)2q} Ei. \{q\,(2\,n-2\,a-1)\}$$

$$+ e^{-2nq} Ei. \{q\,(2\,n-1)\} \Big]$$

$$+ \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-3} e^{-q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-(a-n)2q} Ei. \{q(2a+1-2n)\} + e^{2nq} Ei. \{q(1-2n)\} \Big] \;.\; (96)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Sin.^2\, a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-3} e^{q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{(a-n)2q} Ei. \{q\,(2\,n-2\,a-1)\}$$

$$- e^{-2nq} Ei. \{q\,(2\,n-1)\} \Big]$$

$$+ \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-3} e^{-q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-(a-n)2q} Ei. \{q(2a+1-2n)\} - e^{2nq} Ei. \{q(1-2n)\} \Big] \;.\; (97)$$

Prenons ensuite dans l'intégrale (91) $r=4a+2$ en $r=6a+3$, alors:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos. \{(2a+1)2x\}\, dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-2} \Big[e^{-(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{q\,(2a+1+2n)\}$$

$$- e^{(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{-q\,(2\,n+2\,a+1)\} \Big] \;.\; (98)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos. \{(2a+1)3x\}\, dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-2} \Big[e^{-(2a+1)2q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{2q(2a+1+n)\}$$

$$- e^{(2a+1)2q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{-2\,q(n+2\,a+1)\} \Big] \;.\;.\; (99)$$

Et combinons enfin les intégrales (94) et (98) tant en les additionnant, qu'aussi en les soustrayant, pour acquérir les formules:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.^2\{(2a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-3} e^{-(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-2nq} Ei.\{q(2n+2a+1)\}$$

$$- e^{2nq}\, Ei.\, \{q\,(2\,a+1-2\,n)\}\Big]$$

$$+ \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-3} e^{(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-2nq} Ei.\{q(2n-2a-1)\} - e^{2nq} Ei.\{-q(2n+2a+1)\}\Big]. (100)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Sin.^2\{(2a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-3} e^{-(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-2nq} Ei.\{q(2n+2a+1)\}$$

$$+ e^{2nq}\, Ei.\, \{q\,(2\,a+1-2\,n)\}\Big]$$

$$+ \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-3} e^{(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1^n) \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-2nq} Ei.\{q(2n-2a-1)\} + e^{2nq} Fi.\{-q(2n+2a+1)\}\Big]. (101)$$

Retournons aux équations (78) à (89) et prenons la somme et la différence des intégrales (84) et (80), de (85) et (81), de (86) et (82) et de (87) et (83) respectivement, nous aurons:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x.\, Cos.\, \{(2\,a+p)\,x\}\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} e^{-pq} (1-e^{-2q})^{2a}, \; p \geqq 4\,a;$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} e^{-pq} (1-e^{-2q})^{2a}, \; p = 2\,d+p', \; p'<2, d<2a+1;$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x.\, Cos.\, \{(2\,a-p)\,x\}\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} e^{-pq} (1-e^{2q})^{2a}, \; p \geqq 4\,a;$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} \Big[e^{pq} (1-e^{-2q})^{2a} - e^{pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{-2nq} + e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{2nq}\Big], \; p = 2\,d+p', \; p'<2, d<2\,a;$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Sin.\{(2a+1-p)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-pq} (1-e^{2q})^{2a+1}, \; p \geqq 4\,a+2;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \Big[e^{pq} (1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2\,a+1}{n} e^{-2nq} + e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2\,a+1}{n} e^{2nq}\Big], \; p = 2\,d+p', \; p'<2, d<2a+1;$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Sin.\{(2a+1+p)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-pq} (1-e^{-2q})^{2a+1}, \; p \geqq 4\,a+2;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-pq} (1-e^{-2q})^{2a+1}, \; p = 2\,d+p', \; p'<2, d<2a+1; \quad (p)$$

Supposons dans la première et la troisième de ces formules (p) que p devienne $4a$, car pour cette valeur de p elles valent seulement à l'exception des autres formules correspondantes; il vient:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Cos. 6\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \frac{\pi}{q}\, e^{-4aq}\,(1-e^{-2q})_{2a} \, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Cos. 2\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \frac{\pi}{q}\, e^{-4aq}\,(1-e^{2q})^{2a} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \frac{\pi}{q}\,(1-e^{-2q})^{2a},$$

dont la dernière a été déduite précédemment dans la formule (60).

De même lorsqu'on suppose dans les équations cinquième et septième des formules (p) que p devienne $4a+2$, et pour cette valeur les autres formules correspondantes ne valent plus, tandis que chez celles-là cette supposition est permise, on a

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Sin. \{(2\,a+1)\,x\}\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2}\, \frac{\pi}{q}\, e^{-(4a+2)q}\,(1-e^{2q})^{2a+1}$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-2}\, \frac{\pi}{q}\,(1-e^{-2q})^{2a+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x\ \ Sin. \{(2\,a+1)\,3x\}\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-2}\, \frac{\pi}{q}\, e^{-(4a+2)q}\,(1-e^{-2q})^{2a+1} \quad . \ (103)$$

dont la première est de nouveau la même formule que l'intégrale (61) trouvée antérieurement.

Afin de pouvoir prendre $2a$ pour la valeur de p, il faut au contraire employer la deuxième et la quatrième des équations (p), car c'est seulement dans celles-là qu'une telle supposition est permise: soit donc $d=a$ et p' zéro, alors:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Cos. 4\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \frac{\pi}{q}\, e^{-2aq}\,(1-e^{-2q})^{2a} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (104)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \frac{\pi}{q}\Big[e^{2aq}\,(1-e^{-2q})^{2a} - e^{2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{-2nq}$$

$$+\ e^{-2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{2nq}\Big]$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \frac{\pi}{q}\Big[(e^{q}-e^{-q})^{2a} - e^{2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} + e^{-2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq}\Big] . (105)$$

La somme et la différence des intégrales (60) et (105) fournissent:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Cos.^2 axdx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{2aq}+1)(1-e^{-2q})^{2a} - e^{2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}$$

$$+ e^{-2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq}\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (106)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Sin.^2 axdx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{2aq}-1)(1-e^{-2q})^{2a} - e^{2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}$$

$$+ e^{-2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq}\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (107)$$

et de même la somme et la différence des intégrales (105) et (104) encore:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Cos.^2 2axdx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{2aq}+e^{-2aq})(1-e^{-2q})^{2a} - e^{2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}$$

$$+ e^{-2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq}\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (108)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Sin.^2 2axdx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{2aq}-e^{-2aq})(1-e^{-2q})^{2a} - e^{2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}$$

$$+ e^{-2aq}\sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq}\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (109)$$

Lorsqu'on veut donner la valeur $2a+1$ à p, il faut prendre les équations sixième et huitième des formules (p), puisque cette supposition est seulement permise dans ces valeurs-là: alors d est plus petit que $2a$, et p' est égal à l'unité. La première de ces intégrales se réduit à zéro, après les transformations nécessaires des sommations, et cela s'ensuit aussi de la nature de l'intégrale elle-même: la dernière au contraire fournit ici:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Sin.\{(2a+1)2x\}\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q} e^{(2a+1)q}(1-e^{-2q})^{2a+1} \quad \ldots (110)$$

Après avoir considéré ces quelques cas spéciaux, retournons vers les équations plus générales (p), pour en déduire à présent quelques corollaires générales. En premier lieu il s'ensuit des deux premières de ces formules, lorsque r a la valeur $2a+p$, et donc qu'il est plus grand que $2a$, qu'alors l'intégrale correspondante garde toujours la même valeur; tout de même les deux dernières de ces formules (p) nous apprennent que l'intégrale correspondante ne change pas de valeur, quelle que soit la valeur de r égale à $2a+1+p$, donc pourvu que r soit plus grand que $2a+1$. Lorsqu'ensuite on suppose dans la quatrième des équations (p) que r soit égal à $2a-p$, on obtient la valeur de la première

intégrale, tant que r reste moindre que $2a$, tandis que la supposition de r égal à $2a+1-p$, dans la sixième de ces mêmes équations (p) nous fournit la valeur de la seconde intégrale pour un r quelconque, pourvu qu'il soit moindre que $2a+1$. Tout cela on peut le réunir dans les formules suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x.\, Cos.\, r x\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} e^{(2a-r)q} (1-e^{-2q})^{2a}$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} e^{-rq} (e^q - e^{-q})^{2a}, \quad r > 2a; \ldots\ldots (111)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} \Big[e^{(2a-r)q} (1-e^{-2q})^{2a} - e^{(2a-r)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} + e^{(r-2a)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} \Big[e^{-rq} (e^q - e^{-q})^{2a} - e^{(2a-r)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} + e^{(r-2a)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big], \quad r < 2a; \ldots (112)$$

où d est le plus grand nombre entier dans $a - \frac{1}{2} r$;

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x.\, Sin.\, r x\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{(2a+1-r)q} (1-e^{-2q})^{2a+1}$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-rq} (e^q - e^{-q})^{2a+1}, \quad r > 2a+1; \ldots (113)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \Big[e^{-rq} (e^q - e^{-q})^{2a+1} - e^{(2a+1-r)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} + e^{(r-2a-1)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big], \quad r < 2a+1; \ldots (114)$$

, où d est le plus grand nombre entier dans $\frac{1}{2}(2a+1-r)$.

Prenons dans les intégrales (112) et (114) $2a-1$ et $2a$ respectivement pour la valeur spéciale de r; alors dans les deux cas d devient zéro, de sorte que les sommations que l'on rencontre dans ces formules s'évanouissent: il nous reste donc:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x.\, Cos.\, \{(2a-1)x\}\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} \left[e^q (1-e^{-2q})^{2a} - e^q + e^{-q} \right] . \ (115)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x.\, Sin.\, 2ax\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \left[e^q (1-e^{-2q})^{2a+1} - e^q + e^{-q} \right] . . \ (116)$$

La même chose a lieu, lorsque dans les intégrales (112) et (114) on donne à r respectivement les valeurs $2a-p$ et $2a+1-p$, où p doit être plus petit que 2, de sorte que

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Cos.\{(2a-p)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\Big[e^{pq}(1-e^{-2q})^{2a} - e^{pq} + e^{-pq}\Big], p<2\,; \quad (117)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Sin.\{(2a+1-p)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[e^{pq}(1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{pq} + e^{-pq}\Big], p<2; \quad (118)$$

12. Il nous reste à présent encore à substituer les mêmes valeurs de $\varphi_1(x)$ et de $\varphi_2(x)$ des équations (o) dans les formules générales (L) à (O). Alors les théorèmes (L_1) (L_2) et (L_4) nous donnent:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{xSin.^{2a}x.\,Cos.2\,ax.Sin.p\,x\,dx}{q^2+x^2} &= (-1)^a\, 2^{-2a-2}\,\pi\, e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} (e^{2nq}+e^{-2nq}) \\ &= (-1)^a\, 2^{-2a-2}\,\pi\, e^{-pq}\,\{(1-e^{2q})^{2a} + (1-e^{-2q})^{2a}\} \\ &= (-1)^a\, 2^{-2a-2}\pi\, e^{-pq}\,(1+e^{4aq})\,(1-e^{-2q})^{2a}\end{aligned}\right\}, p>4a; \quad .\ (119)$$

$$\left.\begin{aligned}&= (-1)^a\, 2^{-2a-2}\,\pi\Big[(e^{-pq}-e^{pq})\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} + e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\ &\qquad + e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big] \\ &= (-1)^a\, 2^{-2a-2}\,\pi\Big[(e^{-pq}-e^{pq})\,(1-e^{-2q})^{2a} + e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\ &\qquad + e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&, p=2\,d+p', \\ &p'<2, d<2a; \\ &\ldots\ (120)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{-pq}-e^{pq})\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} + e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\ &\qquad + e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big] \\ &= (-1)^a\, 2^{-2a-2}\,\pi\Big[(e^{-pq}-e^{pq})\,(1-e^{-2q})^{2a} + e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\ &\qquad + e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&, p=2d, d<2a; \\ &\ldots\ (121)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Sin.\{(2a+1)x\}.Sin.px\,dx}{q^2+x^2}=\\&=(-1)^a 2^{-2a-3}\pi e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}(e^{2nq}+e^{-2nq})\\&=(-1)^a 2^{-2a-3}\pi e^{-pq}\left\{(1-e^{2q})^{2a+1}+(1-e^{-2q})^{2a+1}\right\}\\&=(-1)^a 2^{-2a-3}\pi e^{-pq}(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,p>4a+2;\\&\ldots\ldots(122)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&=(-1)^a 2^{-2a-3}\pi\Big[(e^{-pq}-e^{pq})\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}+\\&+e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}+e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]\\&=(-1)^a 2^{-2a-3}\pi\Big[(e^{-pq}-e^{pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}\\&+e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}+e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,p=2d+p',\\&p'<2,d<2a+1;\\&\ldots\ldots\ldots\ldots(123)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&=(-1)^a 2^{-2a-3}\pi\Big[(e^{-pq}-e^{pq})\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}\\&+e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}+e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]\\&=(-1)^a 2^{-2a-3}\pi\Big[(e^{pq}-e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}\\&+e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}+e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,p=2d,d<2a+1;\\&\ldots\ldots\ldots\ldots(124)\end{aligned}$$

tandis que la formule (L_2), qui ne vaut que pour $p=4a$ et $p=4a+2$ respectivement, devient ici:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.Cos.2ax.Sin.4ax\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-4aq}\sum_0^{2a-1}(-1)^n\binom{2a}{n}(e^{2nq}+e^{-2nq})+e^{-8aq}\Big]\\&=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\left[e^{-4aq}\left\{(1-e^{2q})^{2a}-e^{4aq}+(1-e^{-2q})^{2a}-e^{-4aq}\right\}+e^{-8aq}\right]\\&=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\left[(1+e^{-4aq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\right]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (125)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Sin.\{(2a+1)x\}.Sin.\{(2a+1)2x\}\,dx}{q^2+x^2}\\&=(-1)^a 2^{-2a-3}\pi\Big[e^{-(4a+2)q}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a+1}{n}(e^{2nq}+e^{-2nq})+e^{-(8a+4)q}\Big]\\&=(-1)^a 2^{-2a-3}\pi\left[e^{-(4a+2)q}\left\{(1-e^{2q})^{2a+1}-e^{(2a+1)2q}+(1-e^{-2q})^{2a+1}-e^{-(2a+1)2q}\right\}+e^{-(8a+4)q}\right]\\&=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\left[(1-e^{-(4a+2)q})(1-e^{-2q})^{2a+1}+1\right]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (126)\end{aligned}$$

Ensuite l'application des équations générales (M) et (N) donne dans ce cas-ci :

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,2ax.\,Sin\,px\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} e^{pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{-q(p+2n)\} - e^{-2nq} Ei.\{-q(p-2n)\}\Big]$$

$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{q(p-2n)\} - e^{-2nq} Ei.\{q(p+2n)\}\Big]. \quad (127)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\{(2a+1)x\}.\,Sin.px\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} e^{pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{-q(p+2n)\} - e^{-2nq} Ei.\{-q(p-2n)\}\Big]$$

$$+ (-1)^a 2^{-2a-3} e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{q(p-2n)\} - e^{-2nq} Ei.\{q(p+2n)\}\Big]. \quad (128)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,2ax.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{-q(p+2n)\} + e^{-2nq} Ei.\{-q(p-2n)\}\Big]$$

$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{q(p-2n)\} + e^{-2nq} Ei.\{q(p+2n)\}\Big]. \quad (129)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\{(2a+1)x\}.\,Cos.px\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} e^{pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{-q(p+2n)\} + e^{-2nq} Ei.\{-q(p-2n)\}\Big]$$

$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{q(p-2n)\} + e^{-2nq} Ei.\{q(p+2n)\}\Big]. \quad (130)$$

Enfin par l'intermédiaire des formules générales O_1 O_3, O_4 on obtient ici:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,2ax.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2} &= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} (e^{-2nq} - e^{2nq}) \\ &= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi e^{-pq} \{(1-e^{-2q})^{2a} - (1-e^{2q})^{2a}\} \\ &= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi e^{-pq} (1-e^{4aq})(1-e^{-2q})^{2a} \end{aligned}\right\} , p > 4a; \quad (131)$$

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{Sin.}^{2a} x . \operatorname{Sin.} 2ax . \operatorname{Cos.} px dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}$$

$$- e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} - e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big] \quad , p=2d+p', \; p'<2, d<2a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a} - e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}$$

$$- e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big] \quad \ldots (132)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} - e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}$$

$$- e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big] \quad , p=2d, d<2a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a} - e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}$$

$$- e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big] \quad \ldots (133)$$

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{Sin.}^{2a+1} x . \operatorname{Cos.}\{(2a+1)x\} . \operatorname{Cos.} p x dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3}\pi e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}(e^{-2nq}-e^{2nq}) \quad , p > 4a+2;$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3}\pi e^{-pq}\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-(1-e^{2q})^{2a+1}\} \quad \ldots (134)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3}\pi e^{-pq}(1+e^{(4a+2)q})(1-e^{-2q})^{2a+1}$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}$$

$$- e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} - e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big] \quad , p=2d+p', \; p'<2, d<2a+1;$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a+1} \quad \ldots (135)$$

$$- e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} - e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\left\{(2a+1)x\right\}.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \\ \displaystyle = (-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} \\ \displaystyle - e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} - e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big] \\ \displaystyle = (-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a+1} \\ \displaystyle - e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} - e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]\end{array}\right\}, p=2d, d<2a+1; \quad \ldots\ldots\ldots (136)$$

tandis que enfin la formule (0_2) nous fournit les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a}x.Sin.2ax\,Cos.4axdx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-4aq}\sum_0^{2a-1}(-1)^n\binom{2a}{n}(e^{-2nq}-e^{2nq})+e^{-8aq}\Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-4aq}\left\{(1-e^{-2q})^{2a}-e^{-4aq}-(1-e^{2q})^{2a}+e^{4aq}\right\}+e^{-8aq}$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[(1-e^{-4aq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\Big] \ldots\ldots\ldots\ldots (137)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\left\{(2a+1)x\right\}.\,Cos.\left\{(2a+1)\,2\,x\right\}dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\Big[e^{-(4a+2)q}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a+1}{n}(e^{-2nq}-e^{2nq})+e^{-(8a+4)q}\Big]$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\Big[e^{-(4a+2)q}\left\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-e^{-(2a+1)2q}-(1-e^{2q})^{2a+1}+e^{(2a+1)2q}\right\}+e^{-(8a+4)q}$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\Big[(1+e^{-(4a+2)q})(1-e^{-2q})^{2a+1}+1\Big] \ldots\ldots\ldots\ldots (138)$$

Et ces formules diverses offrent une nouvelle occasion pour quelques observations et particularisations suivantes. En premier lieu on peut prendre la somme et la différence des intégrales (129) et (127) et des autres (130) et (128): de cette manière l'on acquiert les formules:

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a}x.\,Cos.\left\{(2a+p)x\right\}dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-1}e^{pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\,Ei.\left\{-q(p+2n)\right\}$$

$$+ (-1)^{a-1}2^{-2a-1}e^{-pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\,Ei.\left\{q(p+2n)\right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\left\{(2a-p)x\right\}dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-1}e^{pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\,Ei.\left\{-q(p-2n)\right\}$$

$$+ (-1)^{a-1}2^{-2a-1}e^{-pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\,Ei.\left\{q(p-2n)\right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x . Sin. \{(2a+1+p)x\} dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{-q(p+2n)\}$$

$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(p+2n)\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x . Sin. \{(2a+1-p)x\} dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{-q(p-2n)\}$$

$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{q(p-2n)\}$$

Ici la deuxième et la quatrième de ces équations se laissent aisément transformer dans celles qui les précèdent respectivement: de sorte que celles-ci, c'est-à-dire la première et la troisième, valent aussi pour des p négatifs. Prenons dans la première $2a+p=r$, donc $p=r-2a$, et de même dans la troisième $2a+1+p=r$, donc $p=r-2a-1$, de sorte que r devient tout-à-fait arbitraire dans les deux équations et peut acquérir toute valeur possible, exceptée la valeur $2a$ dans la première et $2a+1$ dans l'autre. La première propriété est évidente tout de suite, puisque p est tout-à-fait arbitraire, et que dès-lors dans les quantités $2a+p$ et $2a+1+p$ le caractère distinctif de parité ou d'imparité se perd totalement: et quant à la dernière propriété, pour ces valeurs spéciales de r, p devrait être nul, tandis qu'il doit toujours rester plus grand que zéro. Tout cela nous conduit à ces formules, qui valent généralement:

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a} x . Cos. rx dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} e^{(r-2a)q} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} Ei. \{q(2a-2n-r)\}$$

$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} e^{(2a-r)q} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(2n-2a+r)\} \quad . \; . \; (139)$$

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x . Sin\, rx dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{(r-2a-1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nb} Ei. \{q(2a+1-2n-r)\}$$

$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{(2a+1-r)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(2n-2a-1+r)\} . (140)$$

De ces formules on déduit pour les valeurs spéciales $4a$ et $6a$ de r dans la formule (139), et pour les valeurs $4a+2$ et $6a+3$ de r dans la formule (140), les cas suivants:

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a} x . Cos. 4ax dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} \Big[e^{2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} Ei. \{-2q(a+n)\}$$

$$+ e^{-2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} Ei. \{2q(n+a)\} \Big] \; . \; . \; . \; . \; . \; (141)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,6\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-1}\Big[e^{4aq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2\,a}{n}\,e^{2nq}\,Ei.\{-2q\,(2a+n)\}$$

$$+\;e^{-4aq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2\,a}{n}\,e^{-2nq}\,Ei.\,\{2\,q\,(2\,a+n)\}\Big] \ldots\ldots (142)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\{(4a+2)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\Big[e^{(2a+1)q}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}Ei.\{-q(2a+1+2n)\}$$

$$+\;e^{-(2a+1)q}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2\,a+1}{n}e^{-2nq}\,Ei.\,\{q\,(2\,n+2\,a+1)\}\Big]\,.\,(143)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\{(6a+3)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\Big[e^{(2a+1)2q}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}Ei\{-2q(2a+1+n)\}$$

$$+\;e^{-(2a+1)2q}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2\,a+1}{n}e^{-2nq}\,Ei.\,\{2\,q\,(n+2\,a+1)\}\Big]\,.\,(144)$$

Soit encore zéro la valeur de r dans l'intégrale (139), laquelle supposition y est permise; on trouve:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-1}\Big[e^{-2aq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2\,a}{n}\,e^{2nq}\,Ei.\,\{2\,q\,(a-n)\}$$

$$+\;e^{2aq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2\,a}{n}e^{-2nq}\,Ei.\,\{2\,q\,(n-a)\}\Big] \ldots\ldots\ldots\ldots (145)$$

Lorsqu'on prend la somme et la différence de la formule (64) et de cette dernière, l'on obtient

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.^2\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (146)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.^2\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = -\,\infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (147)$$

tandis que la somme et la différence de cette même integrale (145) avec la formule (140) nous fournissent les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.^2\,2\,a\,x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,e^{-2aq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2\,a}{n}\Big[e^{-2nq}\,Ei.\,\{2\,q\,(a+n)\}$$

$$+\;e^{2nq}\,Ei.\,\{2q\,(a-n)\}\Big]$$

$$+\;(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}e^{2aq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}\Big[e^{2nq}Ei.\{-2q(a+n)\}+e^{-2nq}Ei.\{2q(n-a)\}.\Big] (148)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.^2\, 2\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{-2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2\,a}{n} \Big[e^{2nq}\, Ei.\, \{2\, q\, (a-n)\} - e^{-2nq}\, Ei.\, \{2q\, (a+n)\}\Big]$$

$$+ (-1)^a\, 2^{-2a-2}\, e^{2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei. \{-2q(a+n)\} - e^{-2nq} Ei. \{2q(n-a)\}\Big]. (149)$$

Ensuite l'on peut prendre encore la somme et la différence des formules spéciales (125) et (137) afin d'acquérir les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.\, 6\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, e^{-4aq}\, (1-e^{-2q})^{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.\, 2\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, \{(1-e^{-2q})^{2a}-1\}.$$

Cette dernière intégrale était déjà trouvée plus haut dans la formule (68). De la même manière les intégrales (138) et (126) conduisent aux formules:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a+1} x.\, Cos.\, \{(2\, a+1)\, 3x\}\, d\, x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2}\, \pi\, e^{-(4a+2)q}\, (1-e^{-2q})^{2a+1}. (151)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a+1} x.\, Cos.\, \{(2\, a+1)\, x\}\, d\, x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2}\, \pi\, \{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\},$$

dont aussi la dernière se trouve déjà déduite précédemment dans l'intégrale (69).

Ensuite on peut encore combiner les autres intégrales de la série 119 à 138 par voie d'addition et de soustraction, c'est-à-dire l'intégrale (131) avec (119), (132) avec (120), (133) avec (121), (134) avec (122), (135) avec (123) et (136) avec (124). De cette manière l'on parvient aux intégrales:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.\, \{(2\, a+p)\, x\}\, d\, x}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, e^{-pq}\, (1-e^{-2q})^{2a}\ , \ p > 4\, a;$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, e^{-pq}\, (1-e^{-2q})^{2a}, p = 2\, d + p', p' < 2\, , d < 2\, a;$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, e^{-pq}\, (1-e^{-2q})^{2a}, p = 2\, d, d < 2\, a;$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.\, \{(2\, a-p)\, x\}\, d\, x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-1}\, \pi\, e^{-pq}\, (1-e^{2q})^{2a}\ , \ p > 4\, a;$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi \Big[e^{pq}\, (1-e^{-2q})^{2a} - e^{pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{-2nq} - e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{2nq}\Big], p = 2\, d + p', p' < 2\, , d < 2\, a; \quad (r)$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi \Big[e^{pq}\, (1-e^{-2q})^{2a} - e^{pq} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{-2nq} - e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{2nq}\Big], p = 2d, d < 2a;$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.\{(2a+1+p)x\}dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\pi e^{-pq}(1-e^{-2q})^{2a+1}, p>4a+1;\\
&\qquad = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\pi e^{-pq}(1-e^{-2q})^{2a+1}, p=2d+p', p'<2, d<2a+1;\\
&\qquad = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\pi e^{-pq}(1-e^{-2q})^{2a+1}, p=2d, d<2a+1;\\
&\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.\{(2a+1-p)x\}dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\pi e^{-pq}e^{(4a+2)q}(1-e^{-2q})^{2a+1}\\
&\qquad = (-1)^{a}\,2^{-2a-2}\pi e^{-pq}(1-e^{2q})^{2a+1}, p>4a+2;\\
&\qquad = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-pq}(1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}\\
&\qquad\qquad - e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big], p=2d+p', p'<2, d<2a+1;\\
&\qquad = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-pq}(1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}\\
&\qquad\qquad - e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big], p=2d, d<2a+1;
\end{aligned}\right\}(r)$$

Lorsqu'on voudrait donner la valeur $2a$ à p dans la sixième de ces formules, l'intégrale acquiert une valeur nulle, après les réductions nécessaires des sommations pour $d=a$, comme la valeur qui suit de la supposition pour p: et cela doit être ainsi, parce que pour cette valeur de p la fonction $\{Sin.(2a-p)x\}$ sous le signe d'intégration s'évanouit elle-même. Prenons au contraire dans la troisième de ces intégrales (r) $2a$ pour valeur de p, d'où s'ensuit $d=a$ et de même dans la huitième et onzième de ces mêmes formules $2a+1$ pour valeur de p, de sorte que d soit égal à a et p' à l'unité; alors viennent les intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.Sin.4ax\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-1}\pi e^{-2aq}(1-e^{-2q})^{2a} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (152)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.\{(2a+1)2x\}dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\pi e^{-(2a+1)q}(1-e^{-2q})^{2a+1}. (153)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-(2a+1)q}(1-e^{-2q})^{2a+1}$$
$$- e^{(2a+1)q}\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} - e^{-(2a+1)q}\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big].$$

Mais

$$e^{(2a+1)q}\sum_{0}^{a}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} = e^{-(2a+1)q}\sum_{0}^{a}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2(n-2a-1)q}$$

$$= e^{-(2a+1)q}\sum_{2a+1}^{a+1}(-1)^{n-1}\binom{2a+1}{2a+1-n}e^{2nq} = -e^{-(2a+1)q}\sum_{2a+1}^{a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq},$$

lorsqu'on y fait attention qu'on a identiquement $\binom{2a+1}{2a+1-n} = \binom{2a+1}{n}$ comme précédemment. La somme des deux sommations devient donc:

$$e^{-(2a+1)q}\left[-\sum_{a+1}^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq} + \sum_{0}^{a}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right]$$

$$= e^{-(2a+1)q}\left[-\sum_{0}^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq} + 2\sum_{0}^{a}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right]$$

$$= e^{-(2a+1)q}\left[-(1-e^{2q})^{2a+1} + 2\sum_{0}^{a}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right]$$

et par suite enfin:

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-(2a+1)q}\left[(1-e^{-2q})^{2a+1} + (1-e^{2q})^{2a+1} - 2\sum_{0}^{a}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right]$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-(2a+1)q}\left[(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_{0}^{a}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right]. (154)$$

De cette dernière intégrale et de la formule (153) on déduit par la sommation et la soustraction:

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1}x. Cos.^2\{(2a+1)x\}dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi e^{-(2a+1)q}\left[(2-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}\right.$$

$$\left. - 2\sum_{0}^{a}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (155)$$

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1}x. Sin.^2\{(2a+1)x\}dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi e^{-(2a+1)q}\left[(1-e^{2q})^{2a+1}\right.$$

$$\left. - 2\sum_{0}^{a}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (156)$$

Quand nous regardons les équations (r) de plus près, l'on voit que les trois premières nous apprennent que l'intégrale correspondante garde la même valeur pour un r quelconque, plus grand que $2a$, si l'on y suppose $r=2a+p$. De même il suit des neuvième, dixième et onzième de ces équations, que l'in-

tégrale, dont elles expriment la valeur, ne change pour aucun r, pourvu qu'il surpasse $2a+1$, lorsqu'on y prend $2a+1+p=r$. Encore peut-on conclure de la cinquième et sixième de ces formules, quand on y suppose $2a-p=r$, donc $p=2a-r$, que leur valeur pour un r quelconque moindre que $2a$ est différente, selon que r est entier ou non: dans le premier cas on doit se servir de la sixième formule, dans le second cas au contraire de la cinquième; dans les deux cas pourtant on a $2d=p=2a-r$ et $2d=p-p'=2a-r-p'$, donc toujours d le plus grand nombre entier, qui soit contenu dans $a-\frac{1}{2}r$. De même les onzième et douzième des équations (r) nous apprennent, lorsqu'on prend $2a+1-p=r$, donc $p=2a+1-r$, que leur valeur dépend de la circonstance, que r soit un nombre entier ou non. Quand r est un nombre entier, alors il faut employer la formule douzième; dans ce cas l'on a $2d=p=2a+1-r$; au contraire la formule onzième nous peut servir, lorsque r est une fraction: alors on a $2d=p-p'=2a+1-r-p'$. Donc dans tous les cas aussi on trouve ici que d est le plus grand nombre entier qui se trouve dans $\frac{1}{2}(2a+1-r)$. On a donc:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.\, r x\, d x}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \pi e^{(2a-r)q} (1-e^{-2q})^{2a} \quad , r > 2a; \; \ldots . (157)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi e^{-rq} (e^q - e^{-q})^{2a}$$

$$\left.\begin{aligned} &= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[e^{(2a-r)q} (1-e^{-2q})^{2a} - e^{(2a-r)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} \right. \\ &\qquad \left. - e^{(r-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \right] \\ &= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[e^{-rq} (e^q - e^{-q})^{2a} - e^{(2a-r)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} \right. \\ &\qquad \left. - e^{(r-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \right] \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &, r < 2a, \\ &r \text{ entier}; \\ &\ldots (158) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[e^{(2a-r)q} (1-e^{-2q})^{2a} - e^{(2a-r)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} \right. \\ &\qquad \left. - e^{(r-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \right] \\ &= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[e^{-rq} (e^q - e^{-q})^{2a} - e^{(2a-r)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} \right. \\ &\qquad \left. - e^{(r-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \right] \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &, r < 2a, \\ &r \text{ fractionnaire}; \\ &\ldots (159) \end{aligned}$$

où d le plus grand nombre entier dans $(a-\frac{1}{2}r)$.

$$\int_0^{\infty} \frac{x \, Sin.^{2a+1} x . \, Cos. \, r\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2}\, \pi\, e^{(2a+1-r)q} (1 - e^{-2q})^{2a+1} \quad , \; r > 2\,a + 1;$$

$$= (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2}\, \pi\, e^{-rq}\, (e^{q} - e^{-q})^{2a+1} \quad \ldots\ldots (160)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[e^{(r-2a-1)q} (1 - e^{-2q})^{2a+1} - e^{(2a+1-r)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} , \; r < 2a+1, \text{ entier;}$$

$$- \, e^{(r-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2\,a+1}{n} e^{2nq} \Big] \ldots (161)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[e^{(r-2a-1)q} (1 - e^{-2q})^{2a+1} - e^{(2a+1-r)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} , \; r < 2a+1, \text{ fractionnaire;}$$

$$- \, e^{(r-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2\,a+1}{n} e^{2nq} \Big] \ldots (162)$$

où d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2\,a+1-r)$.

Prenons r égal à $2\,a-1$ dans l'intégrale (158) et égal à $2\,a$ dans l'autre intégrale (161), alors, puisque dans ces deux cas on sait que d est zéro, il s'ensuit que:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \, Sin.^{2a} x. \, Sin. \, \{(2\,a-1)\,x\}\, d\,x}{q^2 + x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi \Big[e^{q} (1 - e^{-2q})^{2a} - e^{q} \Big]$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, e^{q} \,\{(1 - e^{-2q})^{2a} - 1\} \quad \ldots (163)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \, Sin.^{2a+1} x. \, Cos. \, 2\,a\,x\,d\,x}{q^2 + x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2}\, \pi \Big[e^{-q} (1 - e^{-2q})^{2a+1} - e^{-q} \Big]$$

$$= (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2}\, \pi\, e^{-q} \,\{(1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1\} \quad \ldots (164)$$

De même donnez à r les valeurs $2a-p$ et $2a+1-p$ dans les intégrales (159) et (162) respectivement: de sorte que dans ces deux cas d doit être zéro, aussi longtemps que p reste moindre que 2: sous cette réstriction on trouve:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \, Sin.^{2a} x. \, Sin. \{(2\,a-p)\,x\}\, d\,x}{q^2 + x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi \{ e^{pq} (1 - e^{-2q})^{2a} - e^{pq} - e^{-pq} \} . \; (165)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \, Sin.^{2a+1} x. Cos. \{(2a+1-p)\,x\}\, d\,x}{q^2 + x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \pi \{ e^{-pq} (1 - e^{-2q})^{2a+1} - e^{pq} - e^{-pq} \} . (166)$$

13. Dans les trois paragraphes précédents (10) à (12) on a étudié les quatre dernières intégrales, dont nous nous étions proposé la discussion; et l'on en a traité divers cas spéciaux. Tout comme au paragraphe 9, la table suivante peut servir à acquérir un coup d'oeuil général sur les résultats, que

l'on a trouvés: chaque fois on y a annoté les formules, où ces valeurs spéciales ont été déduites. Cette table est divisée en deux parties, selon qu'il se trouve sous le signe d'intégration la fonction $Sin.^{2a} x$ ou bien $Sin.^{2a+1} x$: du reste il est entièrement analogue à la table précédente.

pour	$r = r,$	$= 0,$	$= 2a,$	$= 4a,$	$= 6a,$	$= a+2,$	$= a-1.$
$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Cos. r x d x}{q^2+x^2}$	111, 112	105	60	104	102	72	115
$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Sin. r x d x}{q^2+x^2}$	90		62	92	93	74	
$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a} x. Cos. r x d x}{q^2+x^2}$	139	146	64	141	142	70	
$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a} x. Sin. r x d x}{q^2+x^2}$	157, 158, 159		68	152	150	76	163

pour	$r = r,$	$= 0,$	$= 2a+1,$	$= 4a+2,$	$= 6a+3,$	$= a+2,$	$= a-1.$
$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos. r x d x}{q^2+x^2}$	91	94	63	98	99	75	
$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Sin. r x d x}{q^2+x^2}$	113, 114		61	110	103	73	116
$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a-1} x. Cos. r x d x}{q^2+x^2}$	160, 161, 162	154	69	153	151	77	164
$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x. Sin. r x d x}{q^2+x^2}$	140		65	143	144	71	

De ces cent-soixante-six intégrales il y a soixante quatre, qui ne contiennent aucune sommation, et ont ainsi des valeurs très-simples: mais aussi les autres sont composées de sommations finies, et de nature bien simple, de sorte qu'elles peuvent être aisément développées dans chaque cas spécial. L'on trouve confirmé ici, ce qui ressortait de la théorie, c'est-à-dire, que la décomposition des sommations dans un tel sens, que la fonction $p - ns$ restât toujours positive, est nécessaire dans bien des cas: néanmoins il y faut ajouter, que cette obligation s'annulle quelquefois, comme par éxemple dans les deux premières des formules (m), dans les trois premières des intégrales (n), dans les deux premières, la septième et la huitième des équations (p) et dans les trois premières, la septième, la huitième et la neuvième des formules (r).

III. DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX POUR LES CAS, OÙ F (x) EST UNE FRACTION QUI AIT LA FONCTION $1 - 2p\,Cos.\,s\,x + p^2$ POUR DÉNOMINATEUR. — APPLICATIONS DE CES THÉORÈMES.

14. Trois des intégrales trouvées donnent lieu à l'application d'une méthode, qui, bien que totalement indirecte, peut quelque fois faire naître des résultats intéressants. Car si l'on connaît une intégrale

$$\int_a^b f(x,c)\,dx = \mathrm{F}(c),$$

et si la constante c est entièrement libre, c'est-à-dire qu'elle n'est pas assujettie à des limites de maximum et de minimum, alors on peut donner à c des valeurs différentes, et additionner toutes les équations qui résultent de cette substitution: et même quand c est compris entre certaines limites, cette méthode continue de subsister, pourvu qu'alors on ne surpasse pas ces limites. Lorsque on donne donc successivement à la constante c les valeurs $g, g+1, g+2, g+3 \ldots h$ (et que ces valeurs de c ne sont pas contraires aux conditions, auxquelles il est soumis) alors on peut exprimer la somme des expressions, que l'on obtient par cette méthode, de la manière suivante:

$$\sum_{c=g}^{c=h} \int_a f(x,c)\,dx = \int_a^b dx \sum_{c=g}^{c=h} f(x,c) = \sum_{c=g}^{c=h} \mathrm{F}(c) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(s}$$

Auprès de cette méthode il importe donc de deux points capitaux: premièrement et surtout, que la sommation des intégrales puisse se réduire à la sommation d'un seul facteur, et que cette dernière sommation de nouveau puisse être exprimée par une fonction finie — et en second lieu, que dans le second membre de l'équation précédente la sommation puisse se faire véritablement, c'est-à-dire donner lieu à une fonction fermée: lorsque cette dernière condition ne se trouve pas remplie, l'intégrale définie est réduite à une sommation, c'est-à-dire à une série, et l'on acquiert un de ces résultats dont on a déjà parlé au paragraphe premier.

Pour en venir à l'application, que je me proposais ici, il faut employer les séries

$$\left.\begin{aligned} \frac{1 - y\,Cos.\,z - y^\alpha\,Cos.\,\alpha z + y^{\alpha+1}\,Cos.\,\{(\alpha-1)z\}}{1 - 2y\,Cos.\,z + y^2} &= \sum_0^{\alpha-1} y^n\,Cos.\,nz \\ \frac{y\,Sin\,z - y^\alpha\,Sin\,\alpha z + y^{\alpha+1}\,Sin.\,\{(\alpha-1)z\}}{1 - 2y\,Cos.\,z + y^2} &= \sum_0^{\alpha-1} y^n\,Sin.\,nz \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{t}$$

Ces séries sont connues, mais on peut aisément se convaincre de l'identité de ces formules: on n'a besoin que de développer actuellement la sommation et de multiplier ce développement par le dénominateur de la fonction respective; dans la première équation on obtient des produits de deux cosinus, que l'on peut réduire à la somme de deux cosinus, comme dans la seconde il faut décomposer le produit d'une sinus avec une cosinus dans la somme de deux sinus. En tous cas les formules deviennent identiques.

Lorsqu'on sait en outre que la valeur de y est comprise entre -1 et $+1$, les fonctions y^{α} et $y^{\alpha+1}$ s'annullent, lorsque α diverge vers l'infini, et l'on obtient dans ce cas de *Lim.* $\alpha=\infty$:

$$\frac{1-y\,Cos.z}{1-2y\,Cos.z+y^2}=\sum_0^{\infty}y^n\,Cos.nz\quad,\quad\frac{y\,Sin.z}{1-2y\,Cos.z+y^2}=\sum_0^{\infty}y^n Sin.nz,\ \text{pour}\ y^2<1\,.(u)$$

Lorsqu'on prend la différence de ces dernières équations avec les formules (t) il reste:

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^{\alpha}Cos.\alpha z-y^{\alpha+1}Cos.\{(\alpha-1)z\}}{1-2y\,Cos.z+y^2}&=\sum_{\alpha}^{\infty}y^n Cos.nz\,,\ \text{ou bien}\ \frac{Cos.\alpha z-y\,Cos.\{(\alpha-1)z\}}{1-2y\,Cos.z+y^2}=\frac{1}{y^{\alpha}}\sum_{\alpha}^{\infty}y^n Cos.nz\\ \frac{y^{\alpha}Sin.\alpha z-y^{\alpha+1}Sin.\{(\alpha-1)z\}}{1-2y\,Cos.z+y^2}&=\sum_{\alpha}^{\infty}y^n Sin.nz\,,\ \text{ou bien}\ \frac{Sin.\alpha z-y\,Sin.\{(\alpha-1)z\}}{1-2y\,Cos.z+y^2}=\frac{1}{y^{\alpha}}\sum_{\alpha}^{\infty}y^n Sin.nz\end{aligned}\right\}.(v)$$

Et d'ici l'on déduit facilement pour $z=sx$ et $y=p$ les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b\frac{1-p\,Cos.sx}{1-2p\,Cos.sx+p^2}f(x)\,dx&=\int_a^b f(x)\,dx\sum_0^{\infty}p^n\,Cos.nsx=\sum_0^{\infty}p^n\int_a^b f(x)\,Cos.nsxdx\quad\ldots(A')\\ \int_a^b\frac{p\,Sin.sx}{1-2p\,Cos.sx+p^2}f(x)\,dx&=\int_a^b f(x)\,dx\sum_0^{\infty}p^n\,Sin.nsx=\sum_0^{\infty}p^n\int_a^b f(x)\,Sin.nsxdx\quad\ldots(B')\end{aligned}\right\},p^2<1;$$

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b\frac{Cos.\alpha sx-p\,Cos.\{(\alpha-1)sx\}}{1-2p\,Cos.sx+p^2}f(x)dx&=\int_a^b f(x)dx\frac{1}{p^{\alpha}}\sum_{\alpha}^{\infty}p^n Cos.nsx=\frac{1}{p^{\alpha}}\sum_{\alpha}^{\infty}p^n\int_a^b f(x)Cos.nsxdx\quad\ldots(C')\\ \int_a^b\frac{Sin.\alpha sx-p\,Sin.\{(\alpha-1)sx\}}{1-2p\,Cos.sx+p^2}f(x)dx&=\int_a^b f(x)dx\frac{1}{p^{\alpha}}\sum_{\alpha}^{\infty}p^n Sin.nsx=\frac{1}{p^{\alpha}}\sum_{\alpha}^{\infty}p^n\int_a^b f(x)Sin.nsxdx\quad\ldots(D')\end{aligned}\right\},p^2<1;$$

Le premier couple de ces formules peut donc servir lorsqu'on sait, que s se trouve entre les limites zéro et l'infini, mais l'autre seulement lorsque s n'est pas situé hors des limites α et l'infini: dans toutes la valeur numérique de p doit rester moindre que l'unité.

15. Lorsqu'à présent on considère l'intégrale (25), on s'aperçoit qu'elle est très-propre à être sommée suivant les valeurs successives des r, pourvu que r soit plus grand que a: mais de l'intégrale (1) il s'ensuit que la même valeur vaut encore pour $r = a$. Prenons donc dans l'équation (C') $\alpha = a$, et $ns = r$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{Cos. a s x - p Cos.\{(a-1)sx\}}{1 - 2p\,Cos.\,s x + p^2} \frac{Cos.^a x dx}{q^2 + x^2} = \frac{1}{p^a} \sum_a^\infty p^n \int_0^\infty \frac{Cos.^a x dx}{q^2 + x^2} Cos. nsx = \frac{1}{p^a} \sum_a^\infty p^n\, 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} e^{-nsq} (e^q + e^{-q})^a$$

$$= \frac{1}{p^a} 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a \sum_a^\infty p^n e^{-nsq} = \frac{1}{p^a} 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a \frac{p^a e^{(1-a)sq}}{e^{sq} - p} = 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} e^{(1-a)sq} \frac{(e^q + e^{-q})^a}{e^{sq} - p},\ s \geqq 1 \ldots (167)$$

et donc

$$= 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} e^q \frac{(1 + e^{-2q})^a}{e^q - p} \text{ pour } s = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (168)$$

, où l'on a transformé les sommations de la manière suivante:

$$\sum_c^\infty p^n e^{-nsq} = \sum_0^\infty (pe^{-sq})^n - \sum_0^{c-1} (pe^{-sq})^n = \frac{1}{1 - pe^{-sq}} - \frac{1 - (pe^{-sq})^c}{1 - pe^{-sq}} = \frac{(pe^{-sq})^c}{1 - pe^{-sq}} = \frac{p^c e^{(1-c)sq}}{e^{sq} - p} . (a)$$

ce qui est permis ici, puisqu'on a p plus petit que l'unité, et donc d'autant plus $pe^{-sq} = p : e^{sq}$ plus petit que l'unité.

D'après la formule goniométrique

$$2\left[Cos.\{(a+1)x\} - p\,Cos.\,ax\right] Cos.^{a+1} x - \left[Cos.\,ax - p\,Cos.\{(a-1)x\}\right] Cos.^a x =$$
$$= \left[Cos.\{(a+2)x\} - p\,Cos.\{(a+1)x\}\right] Cos.^a x$$

on déduit encore de cette intégrale (168) la suivante

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\{(a+2)x\} - p\,Cos.\{(a+1)x\}}{1 - 2p\,Cos. x + p^2} \frac{Cos.^a x}{q^2 + x^2} dx = 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} e^{-q} \frac{(1 + e^{-2q})^a}{e^q - p} \ldots (169)$$

Si de même on prend en considération l'intégrale (157), on voit qu'elle permet la même sommation à l'égard de r: et tout de même encore l'intégrale (160). Mais dans la première il faut que r surpasse $2a$, et dans la seconde que x soit plus grand que $2a + 1$, tandis que les intégrales se changent respectivement dans les autres (68) et (69), qui sont trouvées précédemment, aussitôt que r atteint ces limites. Soit donc de nouveau ns égal à r dans les formules (C') et (D') et puis dans l'équation (D') $2a$ et dans (C') $2a + 1$ la valeur de α. A présent il faut distinguer les deux cas, que s soit égal à l'unité ou qu'il soit plus grand. Dans le premier cas où s est l'unité, il faut diviser la sommation dans la formule (D') depuis $2a$ jusques à l'infini dans deux parties: premièrement le terme pour n égal à $2a$, pour lequel il faut employer l'intégrale (68), et ensuite la sommation depuis $a + 1$ à l'infini,

où alors la formule (157) doit nous servir. Quant à la sommation dans la formule (C'), qui va de $2a+1$ à l'infini, elle est de nouveau égale à un terme détaché pour la valeur $2a+1$ de n, pour lequel vaut l'intégrale (69), et puis à une sommation depuis $2a+2$ jusques à l'infini, où il faut employer la formule (160). Lorsque au contraire s est plus grand que l'unité, il n'y a pas lieu de diviser ainsi la sommation, pour laquelle vaillent dès-lors seulement les intégrales (157) et (160). D'après tout ce qui vient d'être observé, on a

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\,2asx - p\,Sin.\{(2a-1)sx\}}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a}x}{q^2+x^2}\,dx = \frac{1}{p^{2a}}\sum_{2a}^{\infty} p^n \int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2}\,Sin.\,nsx$$

$$= \frac{1}{p^{2a}}\Big[p^{2a}(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\} + \sum_{2a+1}^{\infty} p^n (-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{-nsq}(e^q-e^{-q})^{2a}\Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\} + \frac{(-1)^a}{p^{2a}} 2^{-2a-1}\pi (e^q-e^{-q})^{2a} \sum_{2a+1}^{\infty} p^n e^{-nsq} \qquad \text{, } s=1; \quad (170)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[(1-e^{-2q})^{2a}-1+\frac{(e^q-e^{-q})^{2a}}{p^{2a}}\,\frac{p^{2a+1}e^{-2aq}}{e^q-p}\Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big\{-1+e^q\,\frac{(1-e^{-2q})^{2a}}{e^q-p}\Big\}$$

$$= \frac{1}{p^{2a}}\sum_{2a}^{\infty} p^n(-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{-nsq}(e^q-e^{-q})^{2a} = \frac{1}{p^{2a}}(-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\sum_{2a}^{\infty}p^n e^{-nsq} \qquad \text{, } s>1;$$

$$= \frac{1}{p^{2a}}(-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\,\frac{p^{2a}e^{(1-2a)sq}}{e^{sq}-p} = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{(1-2a)sq}\,\frac{(e^q-e^{-q})^{2a}}{e^{sq}-p} \quad . (171)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\{(2a+1)sx\} - p\,Cos.\,2asx}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x}{q^2+x^2}\,dx = \frac{1}{p^{2a+1}}\sum_{2a+1}^{\infty} p^n \int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2}\,Cos.\,nsx$$

$$= \frac{1}{p^{2a+1}}\Big[p^{2a+1}(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\} +$$

$$+ \sum_{2a+2}^{\infty} p^n(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-nsq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big] \qquad \text{, } s=1;$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\} + \frac{(-1)^{a-1}}{p^{2a+1}}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\sum_{2a+2}^{\infty}p^n e^{-nsq} \quad . (172)$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[(1-e^{-2q})^{2a+1}-1+\frac{(e^q-e^{-q})^{2a+1}}{p^{2a+1}}\,\frac{p^{2a+2}e^{-(2a+1)q}}{e^q-p}\Big]$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big\{-1+e^q\,\frac{(1-e^{-2q})^{2a+1}}{e^q-p}\Big\}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{Cos.\{(2a+1)sx\}-p\,Cos.2asx}{1-2p\,Cos.sx+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x}{q^2+x^2}dx &= \frac{1}{p^{2a+1}}\sum_{2a+1}^{\infty} p^n \int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2}\,Cos.nsx \\ &= \frac{1}{p^{2a+1}}\sum_{2a+1}^{\infty} p^n(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\, e^{-nsq}\,(e^q-e^{-q})^{2a+1} \\ &= \frac{1}{p^{2a+1}}(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\sum_{2a+1}^{\infty} p^n s^{-nsb} \\ &= \frac{1}{p^{2a+1}}(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{p^{2a+1}\,e^{-2asq}}{e^{sq}-p} \\ &= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\, e^{-2asq}\,\frac{(e^q-e^{-q})^{2a+1}}{e^{sq}-p}\end{aligned}\right\} ,s>1;\ .(173)$$

où l'on a fait usage de la formule de réduction (w).

A présent on a les équations goniométriques:

$$\left[Sin.\,2ax - p\,Sin.\,\{(2a-1)x\}\right]Sin.^{2a}x + 2\left[Cos.\,\{(2a+1)x\} - p\,Cos.\,2ax\right]Sin.^{2a+1}x = \\ = \left[Sin.\,\{(2a+2)x\} - p\,Sin.\,\{(2a+1)x\}\right]Sin.^{2a}x,$$

$$-2\left[Sin\,\{(2a+2)x\} - p\,Sin.\{(2a+1)x\}\right]Sin.^{2a+2}x + \left[Cos.\{(2a+1)x\} - p\,Cos.2ax\right]Sin.^{2a+1}x = \\ = \left[Cos.\{(2a+3)x\} - p\,Cos.\,\{(2a+2)x\}\right]Sin.^{2a+1}x;$$

et si l'on emploie ici les formules (170) et (172) il vient:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\{(2a+2)x\} - p\,Sin.\{(2a+1)x\}}{1-2p\,Cos.x+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a}x}{q^2+x^2}dx = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{-q}\frac{(1-e^{-2q})^{2a}}{e^q-p}. (174)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\{(2a+3)x\} - p\,Cos.\{(2a+2)x\}}{1-2p\,Cos.x+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x}{q^2+x^2}dx = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-q}\frac{(1-e^{-2q})^{2a+1}}{e^q-p}. (175)$$

Mais on peut tout-de-même faire usage des théorèmes (A') et (B') auprès des mêmes intégrales (25), (157) et (160), sans avoir aucunément besoin des théorèmes suivants: et ceci est d'une grande importance, parce que celles-ci contiennent de nouveau des sommations, dont les limites ne sont pas indépendantes de l'argument, suivant lequel la sommation doit avoir lieu, et qui par conséquence ne sauraient servir ici. Pour cela en premier lieu il faut décomposer la sommation de zéro jusques à l'infini dans un terme détaché, qui vaut pour n égal à zéro, et dans une sommation, qui procède de l'unité à l'infini. Ensuite afin de satisfaire aux formules mentionnées, on ne doit pas perdre de vue, qu'elles ne valent que pour des valeurs de r plus grandes que a, que $2a$, ou que $2a+1$ respectivement, de sorte qu'il n'est permis d'en faire usage,

qu'autant que l'on suppose s plus grand que a, que $2a$ et que $2a+1$ respectivement. Eu égard à ces observations diverses, on acquiert par les théorèmes (A′) et (B′):

$$\int_0^\infty \frac{1-p\,Cos.\,s\,x}{1-2p\,Cos.\,s\,x+p^2}\,\frac{Cos.^a\,x}{q^2+x^2}\,d\,x = \sum_0^\infty p^n \int_0^\infty \frac{Cos.^a\,x\,d\,x}{q^2+x^2}\,Cos.\,n\,s\,x$$

$$= \left[\int_0^\infty \frac{Cos.^a x dx}{q^2+x^2} + \sum_1^\infty p^n 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-nsq}(e^q+e^{-q})^a\right] = \left[\int_0^\infty \frac{Cos.^a x dx}{q^2+x^2} + 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a \sum_1^\infty p^n e^{-nsq}\right]$$

$$= \left[\int_0^\infty \frac{Cos.^a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} + 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a \frac{p}{e^{sq}-p}\right],\ s > a;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (x)$$

$$\int_0^\infty \frac{p\,Sin.\,s\,x}{1-2p\,Cos.\,s\,x+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a}\,x}{q^2+x^2}\,d\,x = \sum_0^\infty p^n \int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}\,x\,d\,x}{q^2+x^2}\,Sin.\,n\,s\,x = \sum_1^\infty p^n \int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}\,x\,d\,x}{q^2+x^2}\,Sin.\,n\,s\,x$$

$$= \sum_1^\infty p^n (-1)^a\, 2^{-2a-1}\,\pi\, e^{-nsq}\,(e^q-e^{-q})^{2a} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a} \sum_1^\infty p^n\, e^{-nsq}$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,\frac{p}{e^{sq}-p},\ s > 2a;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (176)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-p\,Cos.\,s\,x}{1-2p\,Cos.\,s\,x+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}\,x}{q^2+x^2}\,d\,x = \sum_0^\infty p^n \int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}\,x\,d\,x}{q^2+x^2}\,Cos.\,n\,s\,x$$

$$= \left[\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}\,x\,d\,x}{q^2+x^2} + \sum_1^\infty p^n \int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}\,x\,d\,x}{q^2+x^2}\,Cos.\,n\,s\,x\right]$$

$$= \left[(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq}\right\} + \right.$$

$$\left. + \sum_1^\infty p^n\,(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,e^{-nsq}\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\right]$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[e^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq}\right\} + \right.$$

$$\left. + (e^q-e^{-q})^{2a+1} \sum_1^\infty p^n\, e^{-nsq}\right]$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[e^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq}\right\} + \right.$$

$$\left. + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\,\frac{p}{e^{sq}-p}\right],\ s > 2a+1;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (177)$$

où l'équation de réduction (w) était nécessaire, ainsi que l'intégrale (154) en-

core auprès de la dernière. Lorsqu'encore on soustrait le double de la formule (177) de l'intégrale (154) on obtient:

$$\int_0^\infty \frac{1-p^2}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x}{q^2+x^2}\,dx =$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+$$

$$+2p\frac{(e^q-e^{-q})^{2a+1}}{e^{sq}-p}\Big],\ s>2a+1;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (178)$$

L'on n'a pas encore transformé la formule (x), parce que l'intégrale dans le second membre de cette équation acquiert une valeur différente, selon que a soit pair ou impair, comme il est évident d'après les formules (21) et (22). Avant cependant que nous passons à cette substitution, nous diminuerons le double de cette intégrale (x) de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x}{q^2+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{Cos.^a x\,dx}{q^2+x^2}$$

c'est-à-dire:

$$\int_0^\infty \frac{1-p^2}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{Cos.^a x}{q^2+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{Cos.^a x\,dx}{q^2+x^2}+2^{-a}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\frac{p}{e^{sq}-p},\ s>a;\ \ldots(y)$$

Donnons à présent dans les formules (x) et (y) à a successivement les valeurs $2a$ et $2a+1$; il vient

$$\int_0^\infty \frac{1-p\,Cos.\,sx}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{Cos.^{2a}x}{q^2+x^2}\,dx = 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\Big[\frac{1}{2}(e^q+e^{-q})^{2a}\frac{p}{e^{sq}-p}+\frac{1}{2}\binom{2a}{a}+$$

$$+\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq}\Big],\ s>2a;\ \ldots\ldots\ (179)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-p^2}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{Cos.^{2a}x}{q^2+x^2}\,dx = 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\Big[(e^q+e^{-q})^{2a}\frac{p}{e^{sq}-p}+\frac{1}{2}\binom{2a}{a}+$$

$$+\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq}\Big],\ s>2a;\ \ldots\ldots\ (180)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-p\,Cos.\,sx}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{Cos.^{2a+1}x}{q^2+x^2}\,dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\Big[\frac{1}{2}(e^q+e^{-q})^{2a+1}\frac{p}{e^{sq}-p}+$$

$$+\sum_0^a\binom{2a+1}{n+a+1}e^{-(2n+1)q}\Big],\ s>2a+1;\ .\ (181)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-p^2}{1-2p\,Cos.\,s\,x+p^2}\,\frac{Cos.^{2a+1}x}{q^2+x^2}\,dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left[(e^q+e^{-q})^{2a+1}\frac{p}{e^{sq}-p}+\right.$$

$$\left.+\sum_0^a\binom{2a+1}{n+a+1}e^{-(2n+1)q}\right], s>2a+1; \;. (182$$

Analoguement aux intégrales (25), (157) et (160) l'on a trouvé encore les formules (45), (90) et (91): mais à ces dernières l'on ne peut pas appliquer cette méthode-ci, vu qu'il s'y trouve des sommations de fonctions d'Intégrales Exponentielles, et que l'on serait conduit à des sommations doubles, parce que dans l'état actuel de l'analyse l'on ne possède pas encore des formules pour l'addition de ces fonctions.

Du reste il ne faut pas perdre de vue, que dans toutes les formules de ce paragraphe, la valeur numérique de p ne doit pas surpasser l'unité, ou que p^2 doit rester moindre que l'unité. Mais il s'ensuit de là que le dénominateur dans toutes ces intégrales peut très-bien devenir

$$1+2p\,Cos.\,s\,x+p^2 \text{ au lieu de } 1-2p\,Cos.\,s\,x+p^2$$

puisque il n'y a qu'à prendre p négatif: dans ce cas dans les valeurs des intégrales p^a deviendra $(-p)^a$ et $e^{sq}-p$ de même $e^{sq}+p$. Toujours alors on garderait la condition: p^2 plus petit que l'unité.

Et cette condition que p^2 doit rester au dessous de l'unité, se laisse changer facilement dans la condition contraire, que p^2 doit toujours surpasser l'unité. Il faut seulement supposer $p=\frac{1}{p'}$: alors les dénominateurs sous le signe d'intégration gardent la même forme: car

$$1\pm 2p\,Cos.\,s\,x+p^2 = 1\pm\frac{2}{p'}Cos.\,s\,x+\frac{1}{p'^2} = \frac{1}{p'^2}\{1\pm 2p'\,Cos.\,s\,x+p'^2\};$$

les puissances de p doivent être prises négativement, car $p^a=(p')^{-a}$, et enfin le dénominateur, qui se présente quelquefois dans les valeurs des intégrales, $e^{sq}\pm p$ devient $e^{sq}\pm\frac{1}{p'}=\frac{1}{p'}(p'\,e^{sq}\pm 1)$. Il n'y a donc aucune difficulté pour quadrupler le nombre des intégrales (167) à (182) pour $p=p, =-p, =\frac{1}{p}$ et $=-\frac{1}{p}$; et nous laisserons cela au lecteur.

IV. DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES GÉNÉRALES

$$\int_0^\infty F(x)\frac{Cos.^a x.Cos.px}{q^2+x^2}dx, \int_0^\infty F(x)\frac{Cos.^a x.Sin.px}{q^2+x^2}dx, \int_0^\infty F(x)\frac{Sin.^a x.Cos.px}{q^2+x^2}dx \text{ et } \int_0^\infty F(x)\frac{Sin.^a x\, Sin.px}{q^2+x^2}dx.$$

16. Les mêmes intégrales, qui ont servi dans le paragraphe 14, à déduire les théorèmes (A′) à (D′), peuvent être employées aussi en application des formules générales (A) et (B). A cet effet il faut considérer, que l'on a trouvé dans les intégrales (21), (22) et (25):

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a} x}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\binom{2a}{a} + 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq},$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a} x.Cos.nsx}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a}e^{-nsq}, \quad ns \geqq 2a,$$

et

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1} x}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\sum_0^a\binom{2a+1}{n+a+1}e^{-(2n+1)q},$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1} x.Cos.nsx}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a+1}e^{-nsq}, \quad ns \geqq 2a+1;$$

et de ces deux paires de formules on peut déduire à présent, d'après le théorème (A), les équations suivantes:

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{Cos.^{2a}x}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left[A_0\left\{\binom{2a}{a}+2\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq}\right\}+(e^q+e^{-q})^{2a}\sum_1^c A_n e^{-nqs}\right], s \geqq 2a; \ldots (P)$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{Cos.^{2a+1}x}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\left[2A_0\sum_0^a\binom{2a+1}{n+a+1}e^{-(2n+1)q}+(e^q+e^{-q})^{2a+1}\sum_1^c A_n e^{-nqs}\right], s \geqq 2a+1; \ldots (Q)$$

Encore a-t-on d'après les formules (157) et (68)

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.Sin.nsx}{q^2+x^2}dx = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}e^{-nsq}, \quad ns > 2a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\}, \quad ns = 2a;$$

donc le théorème général (B) nous fournit ici:

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Sin.^{2a}x}{q^2+x^2}dx = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\sum_1^c B_n e^{-nsq}, \quad s > 2a; \ldots (R_1)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[B_1\left\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\}+(e^q-e^{-q})^{2a}\sum_2^c B_n e^{-2nsq}\right], \quad s = 2a; \ldots (R_2)$$

Enfin on trouve par l'intermédiaire des formules (154), (160) et (69):

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,e^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,n\,s\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}e^{-nsq}\,,\ n\,s > 2\,a+1\,;$$
$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\left\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}\,,\ n\,s = 2\,a+1\,;$$

et l'on en déduit, par l'application de l'équation générale (A), les formules:

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\left[A_0\,e^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\sum_1^c A_n\,e^{-nsq}\right],\ s>2\,a+1\,;\ .\ (S_1)$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\left[A_0\,e^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\} + A_1\left\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\sum_2^c A_n\,e^{-(2a+1)nq}\right],\ s=2\,a+1\,;\ .\ .\ (S_2)$$

L'on peut ensuite satisfaire au théorème général (A) avec les mêmes intégrales à l'aide des suppositions suivantes:

$$f(x)=\frac{Cos.^a x.\,Cos.\,p\,x}{q^2+x^2}\,,\ f(x)=\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,p\,x}{q^2+x^2}\ \text{ et }\ f(x)=\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,p\,x}{q^2+x^2}\,;$$

et de même au théorème général (B) lorsqu'on fait usage des suppositions

$$f(x)=\frac{Cos.^a x.\,Sin.\,p\,x}{q^2+x^2}\,,\ f(x)=\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,p\,x}{q^2+x^2}\ \text{ et }\ f(x)=\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\,p\,x}{q^2+x^2}\,.$$

Alors on obtient d'abord:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{Cos.^a x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} &= A_0\int_0^\infty\frac{Cos.^a x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_1^c A_n\int_0^\infty Cos.^a x\,d\,x\,\frac{Cos.\{(n\,s-p)x\}+Cos.\{(n\,s+p)x\}}{q^2+x^2} \\
\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{Cos.^a x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} &= \frac{1}{2}\sum_1^c B_n\int_0^\infty Cos.^a x\,d\,x\,\frac{Cos.\{(n\,s-p)x\}-Cos.\{(n\,s+p)x\}}{q^2+x^2} \\
\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} &= A_0\int_0^\infty\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_1^c A_n\int_0^\infty x\,Sin.^{2a}x\,d\,x\,\frac{Sin.\{(n\,s+p)x\}-Sin.\{(n\,s-p)x\}}{q^2+x^2}
\end{aligned}\right\}\ .\ (z)$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Sin.^{2a}x.Cos.p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=\frac{1}{2}\sum_1^c B_n\int_0^\infty x\,Sin.^{2a}x\,d\,x\,\frac{Sin.\{(ns+p)x\}+Sin.\{(ns-p)x\}}{q^2+x^2}$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=A_0\int_0^\infty\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_1^c A_n\int_0^\infty x\,Sin.^{2a+1}x\,d\,x\,\frac{Cos.\,\{(n\,s-p)\,x\}+Cos\,\{(n\,s+p)\,x\}}{q^2+x^2}$$ [illegible]

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,Sin.p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=\frac{1}{2}\sum_1^c B_n\int_0^\infty x\,Sin.^{2a+1}x\,d\,x\,\frac{Cos.\{(ns-p)x\}-Cos.\{(ns+p)x\}}{q^2+x^2}$$

Ici donc de nouveau, comme dans la première partie, il faut principalement faire attention à la valeur de $ns-p$, et dans la suite de notre discussion on s'apercevra bientôt que ce n'est que cette valeur dont il faut tenir compte, à propos des limites, que nous devrons prendre pour cette différence $ns-p$.

Auprès des intégrales (25), (157) et (160), dont on aura à faire usage ici, leur valeur est la plus simple, quand $ns-p$ reste supérieur à a, $2a$, et $2a+1$ respectivement (où encore dans le premier cas il peut atteindre cette limite minimum de a): autrement pourtant, les formules suivantes, qui expriment la valeur de ces mêmes intégrales pour le cas, que $ns-p$ devienne inférieur à a, $2a$, et $2a+1$ respectivement, introduiraient des sommations, dont les limites dépendraient de la fonction $ns-p$ elle-même: ce qui donnerait lieu à des résultats, en général bien embarrassants. Afin qu'en effet l'on ne se trouve pas conduit à ces formules plus compliquées, il faut et il suffit, que les inéquations précédentes vaillent pour la plus petite valeur de n, c'est-à-dire pour n égal à l'unité: d'où il résulte pour $ns-p$ plus grand que ou égal à a, plus grand que $2a$ et que $2a+1$ les inéquations correspondantes; p plus grand que ou égal à $s+a$, plus grand que $s-2a$ et que $s-2a-1$. Lorsque cependant on veut faire usage encore des intégrales (68) et (69), les deux dernières inéquations se changent en telle sorte, que p peut atteindre les limites inférieures respectives $s-2a$ et $s-2a-1$, quand les inéquations, qui concernent $ns-p$, subissent le même changement, c'est-à-dire que cette fonction peut devenir égale à ses limites inférieures $2a$ et $2a+1$ respectivement. Dans ce cas on doit évaluer le seul terme correspondant de la sommation d'après ces dernières intégrales; on ne doit pourtant pas oublier, d'y ajouter le terme restant sous le signe de sommation pour l'unité comme

valeur de n, où donc $ns + p$ est respectivement égal à $2p + 2a$ et à $2p + 2a - 1$, et cela en se servant des intégrales (157) et (160). Donc, lorsqu'on se contente de ces valeurs de $s - p$, les formules (z) acquièrent la forme:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi_1(x) \frac{\mathrm{Cos.}^a x . \mathrm{Cos.}\, p x\, dx}{q^2 + x^2} &= \mathrm{A}_0\, 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} e^{-pq} (e^q + e^{-q})^a \\ &+ \frac{1}{2} \sum_1^c \mathrm{A}_n 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a \left[e^{-(ns-p)q} + e^{-(ns+p)q}\right] \\ = 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a &\left[\mathrm{A}_0 e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq}) \frac{1}{2} \sum_1^c \mathrm{A}_n e^{-nsq}\right]\end{aligned}\right\}, p \geqq a, s \geqq 2a; \ldots (\mathrm{T}_1)$$

$$\begin{aligned}= 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} \Bigg[\mathrm{A}_0 &\left\{(e^q + e^{-q})^a e^{-pq} - e^{(a-p)q} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} + e^{(p-a)q} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}\right\} \\ &+ (e^q + e^{-q})^a (e^{pq} + e^{-pq}) \frac{1}{2} \sum_1^c \mathrm{A}_n e^{-nsq} \Bigg] \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{T}_2)\end{aligned}$$

où $p < a$, $2p \leqq s$, et d le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(a - p)$;

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi_2(x) \frac{\mathrm{Cos.}^a x . \mathrm{Sin.}\, p x dx}{q^2 + x^2} &= \frac{1}{2} \sum_1^c \mathrm{B}_n 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a \left[e^{-(ns-p)q} - e^{-(ns+p)q}\right] \\ &= 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a (e^{pq} - e^{-pq}) \frac{1}{2} \sum_1^c \mathrm{B}_n e^{-nsq}\end{aligned}\right\}, p \leqq s - a; \ldots (\mathrm{U})$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi_1(x) \frac{x\, \mathrm{Sin.}^{2a} x . \mathrm{Sin.}\, p x\, dx}{q^2 + x^2} &= \mathrm{A}_0 (-1)^a 2^{-2a-1} \pi e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} \\ + \frac{1}{2} \sum_1^c \mathrm{A}_n (-1)^a 2^{-2a-1} &\pi (e^q - e^{-q})^{2a} \left[e^{-(ns+p)q} - e^{-(ns-p)q}\right] \\ = (-1)^a 2^{-2a-1} \pi (e^q - e^{-q})^{2a} &\left[\mathrm{A}_0 e^{-pq} + (e^{-pq} - e^{pq}) \frac{1}{2} \sum_1^c \mathrm{A}_n e^{-nsq}\right]\end{aligned}\right\}, p > 2a, s > 4a; \ldots (\mathrm{V}_1)$$

$$\left.\begin{aligned}= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \Bigg[\mathrm{A}_0 &\left\{e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - e^{(2a-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}\right. \\ - e^{(p-2a)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} &\Bigg\} + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \frac{1}{2} \sum_1^c \mathrm{A}_n e^{-nsq}\Bigg]\end{aligned}\right\}, \begin{aligned}&p < 2a, 2p < s, \\ &p \text{ entier}; \\ &\ldots\ldots (\mathrm{V}_2)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \Bigg[\mathrm{A}_0 &\left\{e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - e^{(2a-p)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}\right. \\ - e^{(p-2a)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} &\Bigg\} + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \frac{1}{2} \sum_1^c \mathrm{A}_n e^{-nsq}\Bigg]\end{aligned}\right\}, \begin{aligned}&p < 2a, 2p < s, \\ &p \text{ fractionnaire}; \\ &\ldots\ldots (\mathrm{V}_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2} &= A_0(-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}\\ &+ A_1(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\}-e^{-(2p+2a)q}(e^q-e^{-q})^{2a}\Big]\\ &+(-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\\ &=(-1)^a2^{-2a-1}\pi\Big[-\frac{1}{2}A_1\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}\\ &\quad+(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{A_0e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\Big\}\Big]\end{aligned}\qquad ,p=s-2a,\ 2p>s>4a;\ \ldots\ldots (V_4)$$

$$\begin{aligned}&=(-1)^a2^{-2a-1}\pi\Big[A_0\Big\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\\ &\qquad-e^{(p-2a)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big\}\\ &-\frac{1}{2}A_1\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\Big]\end{aligned}\qquad ,p=s-2a,\ 2p<s<4a;\ p\ \text{entier.}\ \ldots (V_5)$$

$$\begin{aligned}&=(-1)^a2^{-2a-1}\pi\Big[A_0\Big\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\\ &\qquad-e^{(p-2a)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big\}\\ &-\frac{1}{2}A_1\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\Big]\end{aligned}\qquad ,p=s-2a,\ 2p<s<4a;\ p\ \text{fractionnaire.}\ \ldots (V_6)$$

Dans ces formules d est le plus grand nombre entier contenu dans $(a-\frac{1}{2}p)$.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Sin.^{2a}x\,Cos.px\,dx}{q^2+x^2}&=\frac{1}{2}\sum_1^c B_n(-1)^a2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\Big[e^{-(ns-p)q}+e^{-(ns+p)q}\Big]\\ &=(-1)^a2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c B_n e^{-nsq}\end{aligned}\qquad ,p<s-2a;\ \ldots (W_1)$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}B_1\Big[(-1)^a2^{-2a-1}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+(-1)^a2^{-2a-1}\pi e^{-(2p+2a)q}(e^q-e^{-q})^{2a}\\ &\qquad+(-1)^a2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c B_n e^{-nsq}\\ &=(-1)^a2^{-2a-1}\pi\Big[\frac{1}{2}B_1\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c B_n e^{-nsq}\Big]\end{aligned}\qquad ,p=s-2a;\ \ldots (W_2)$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x \operatorname{Sin}^{2a+1} x . \operatorname{Cos.} p x\, dx}{q^2+x^2} = A_0(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_1^c A_n(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left[e^{-(ns+p)q}+e^{-(ns-p)q}\right]$$
$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left[A_0 e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c A_n e^{-nsq}\right] \qquad ,p>2a+1,\ s>4a+2;\ \ldots\ldots (X_1)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[A_0\left\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}\right.\right.$$
$$\left.\left.-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c A_n e^{-nsq}\right] \qquad p<2a+1,\ 2p<s,\ p \text{ entier};\ .\ (X_2)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[A_0\left\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}\right.\right.$$
$$\left.\left.-e^{(p-2a-1)}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c A_n e^{-nsq}\right] \qquad ,p<2a+1,\ 2p<s,\ p \text{ fractionnaire};\ \ldots\ldots (X_3)$$

$$=A_0(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}+\frac{1}{2}A_1(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[\left\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}\right.$$
$$\left.+e^{-(2p-2a-1)q}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\right]+(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq} \qquad ,p=s-2a-1.\ 2p>s>4a+2:$$
$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[\frac{1}{2}A_1\left\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}\right.$$
$$\left.+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{A_0 e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\right\}\right] \qquad \ldots\ldots (X_4)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[A_0\left\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}\right.\right.$$
$$\left.-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\}$$
$$\left.+\frac{1}{2}A_1\left\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\right] \qquad ,p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p \text{ entier};\ .\ (X_5)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[A_0\left\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}\right.\right.$$
$$\left.-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\}$$
$$\left.+\frac{1}{2}A_1\left\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\right] \qquad ,p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p \text{ fractionnaire};\ \ldots\ldots (X_6)$$

Ici l'on a d le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a+1-p)$.

$$\int_0^\infty f(\text{Cos}.x)\frac{x\,\text{Sin}.^{2a+1}x.\text{Sin}\,px\,dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\sum_1^c \text{B}_n(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left[e^{-(ns-p)q}-e^{-(ns+p)q}\right]\Bigg\}\,p<s-2a-1;$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c \text{B}_n e^{-nsq}\Bigg\}\quad\ldots\ldots(\text{Y}_1)$$

$$\frac{1}{2}\text{B}_1\Big[(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}-(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-2pq+(2a+2)q}(1-e^{-q})^{2a+1}$$

$$+(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c \text{B}_n e^{-nsq}\Big]\Bigg\}\,p=s-2a-1;$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[\frac{1}{2}\text{B}_1\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c \text{B}_n e^{-nsq}\Big]\Bigg\}\quad\ldots\ldots(\text{Y}_2)$$

A l'égard des limites pour les constantes, qui se trouvent dans ces formules, et entre lesquelles seulement ces formules valent, on les a déduites d'après les considérations suivantes. Dans l'intégrale (T_1) le coefficient de A_0 a été déduit de la formule (25) où p doit être $\geq a$; donc, parce qu'aussi p est $\leq s-a$, on a encore $2a-s\geq 0$: dans l'intégrale (T_2) on a fait usage de (24) dans le même but; et puisque p y doit rester moindre que a, on combinera cette inéquation avec l'autre $p\leq s-a$, pour en tirer $2p\leq s$.

Pour la formule (U) il n'y a que la condition $p\leq s-a$, qui y est nécessaire.

Auprès des intégrales (V_1) et (V_4) le coefficient de A_0 est déterminé d'après la formule (157), comme auprès des intégrales (V_2) et (V_5) d'après l'équation (158) et pour les formules (V_3) et (V_6) d'après l'intégrale (159): de sorte que dans ces deux dernières intégrales (V_3) et (V_6) p est fractionnaire, tandis que p est entier dans les deux précédentes (V_2) et (V_5). De plus, dans l'intégrale (V_1) on sait que p est plus grand que $2a$, donc, si l'on a égard à la condition que p est plus petit que $s-2a$, il s'ensuit que s doit être plus grand que $4a$: pour les intégrales (V_2) et (V_3) on a p plus petit que $2a$, donc, puisque aussi p est moindre que $s-2a$, on a $2p$ plus petit que s: dans la formule (V_4) p doit rester au dessus de $2a$ et être en même temps égal à $s-2a$, de sorte que l'on a $2p$ plus grand que s, et $4a$ plus grand que s; pour les intégrales (V_5) et (V_6) enfin on a la condition que p reste au dessous de $2a$, mais encore on sait que p est égal à $s-2a$, donc il s'ensuit que $2p$ soit moindre que s et que s soit moindre que $4a$.

Les intégrales (W_1) et (W_2) valent respectivement pour p plus petit que $s—2a$ et p égal à $s—2a$.

Dans les intégrales (X_1) et (X_4) la formule (160) est employée pour trouver le coefficient de A_0; de même la formule (161) dans les intégrales (X_2) et (X_5) et la formule (162) dans les intégrales (X_3) et (X_6): il s'ensuit que les deux dernières (X_3) et (X_6) supposent p fractionnaire, celles qui précèdent, c'est-à dire (X_2) et (X_5) au contraire éxigent que p soit entier. Ensuite dans l'intégrale (X_1) on a p plus grand que $2a+1$ et encore p moindre que $s—2a—1$, de sorte que s doit surpasser $4a+2$; dans les intégrales (X_2) et (X_3) p doit être plus petit que $2a+1$ et encore plus petit que $s—2a—1$; donc $2p$ doit être inférieur à s; dans l'intégrale (X_4) on a p plus grand que $2a+1$, mais on a aussi p égal à $s—2a—1$, donc par conséquence encore $2p$ plus grand que s et s plus petit que $4a+2$; auprès des intégrales (X_5) et (X_6) enfin on a la condition que p soit plus petite que $2a+1$, mais en même temps p est égal a $s—2a—1$, donc il faut que s surpasse $2p$, et que s reste inférieur à $4a+2$.

En dernier lieu les intégrales (Y_1) et (Y_2) valent pour p moindre que $s—2a—1$ et pour p égal à $s—2a—1$ respectivement.

Ces diverses conditions, auxquelles les quantités p et s sont assujetties mutuellement et à l'égard de la troisième a, nécessitent, d'après des discussions antérieures, qu'auprès des intégrales V_4, V_5, V_6, W_2, X_4, X_5, X_6 et Y_2 la sommation depuis l'unité jusques à c doit être décomposée dans une sommation depuis 2 à c et dans le seul terme détaché, qui vaille pour la valeur de n l'unité: et ce terme acquiert chaque fois une valeur spéciale, comme coefficient de A_1 ou de B_1 respectivement.

Ces vingt-trois équations (P) à (Y) constituent de nouveau autant de théorèmes différents, qui ont la supposition (a) pour base commune avec les théorèmes, que l'on a déduits aux paragraphes 2 à 4 de la première partie. Elles pourvoient à chaque cas spécial, où l'on doit en faire usage, selon qu'il en est éxigé dans les applications. L'on s'aperçoit qu'elles ne dépendent que de la sommation bien simple $\sum_1^c Ce^{-nqs}$.

Mais il est rémarquable que, lorsqu'on suppose des autres équations de condition entre les éléments p, s et a mutuellement, ces mêmes intégrales, qui se trouvent ici dans les formules (P) à (Y), dépendent de sommations doubles, extrêmement compliquées, en ce que la forme de l'une sommation, dépend des limites de l'autre, tandis que le terme qui doit être sommé, est fonction de l'Intégrale Ex-

ponentielle. Cette remarque met en évidence, il me semble, la nécessité de la marche plus ou moins indirecte de cette méthode, que nous avons suivie dans les parties première et troisième, d'où il résulte que la valeur d'une intégrale définie peut différer de beaucoup quand les circonstances changent à l'égard de la dépendance mutuelle des constantes, qu'elle renferme.

V. APPLICATIONS DE CES DERNIERS THÉORÈMES.

17. Pour l'application des formules générales (P) à (Y) nous pouvons supposer en premier lieu

$$f_1(x) = \frac{1 - r\,Cos.\,s\,x}{1 - 2\,r\,Cos.\,sx + r^2} = \sum_0^\infty r^n\,Cos.\,n\,s\,x = 1 + \sum_1^\infty r^n\,Cos.\,ns\,x,$$

ou plutôt

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{1 - 2\,r\,Cos.\,s\,x + r^2} = \frac{-1}{1-r^2} + \frac{2}{1-r^2}\sum_1^\infty r^n\,Cos.\,n\,s\,x \\ F_1(x) &= \frac{Cos.\,s\,x}{1 - 2\,r\,Cos.\,s\,x + r^2} = \frac{1}{r}\,\frac{-1}{1-r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\sum_1^\infty r^n\,Cos.\,n\,s\,x \\ f_2(x) &= \frac{Sin.\,s\,x}{1 - 2\,r\,Cos.\,s\,x + r^2} = \frac{1}{r}\sum_1^\infty r^n\,Sin.\,n\,s\,x \end{aligned}\right\}\; r^2 < 1;\quad \ldots\ldots\ (aa)$$

On a déjà traité de ces formules au paragraphe 14 : voyez-là les équations (u). Ici donc on a respectivement :

$$A_0 = \frac{1}{1-r^2},\quad A_0 = \frac{1}{r}\,\frac{-1}{1-r^2};$$

$$A_n = \frac{2\,r^n}{1-r^2},\quad A_n = \frac{1}{r}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\,r^n,\quad B_n = \frac{1}{r}\,.\,r^n.$$

Donc puisque

$$\sum_1^\infty r^n\,e^{-nqs} = \frac{r}{e^{qs} - r},\quad \sum_2^\infty r^n\,e^{-nqs} = \frac{r^2\,e^{-qs}}{e^{qs} - r},\ \ldots\ldots\ (ab)$$

par l'intermédiaire des équations générales (P), (Q), (R) et (S) :

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a}x}{1 - 2\,r\,Cos.\,sx + r^2}\,\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-2a-1}}{1-r^2}\,\frac{\pi}{q}\left[\binom{2a}{a} + 2\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq} + (e^q+e^{-q})^{2a}\frac{2r}{e^{qs}-r}\right],\ s \geqq 2a;$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a}x.\,Cos.\,sx}{1-2rCos.\,sx+r^2}\,\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-2a-1}}{1-r^2}\,\frac{\pi}{q}\left[\frac{1-r^2}{r}\left\{\binom{2a}{a} + 2\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq}\right\} + (e^q+e^{-q})^{2a}\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\right],\ s \geqq 2a;\ (183)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1}x}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-2a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\left[\sum_0^a \binom{2a+1}{n+a+1} e^{-(2n+1)q} + (e^q+e^{-q})^{2a+1}\frac{r}{e^{qs}-r}\right], s \geqq 2a+1;$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1}x.\,Cos.sx}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-2a-2}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\left[2r\sum_0^a \binom{2a+1}{n+a+1} e^{-(2n+1)q} + (e^q+e^{-q})^{2a+1}\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\right], s \geqq 2a+1; \quad \ldots (184)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.sx}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{x}{q^2+x^2}dx = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{1}{e^{qs}-r}, \quad s > 2a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[(1-e^{-2q})^{2a} - 1 + (e^q-e^{-q})^{2a}\frac{re^{-2aq}}{e^{2aq}-r}\right], \quad s = 2a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[\frac{(e^q-e^{-q})^{2a}}{e^{2aq}-r} - 1\right] \quad \ldots (185)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[e^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - \right.\right.$$

$$\left.\left.- 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{2r}{e^{qs}-r}\right], \quad s > 2a+1;$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[e^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\} + \right.$$

$$\left. + 2r\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{2r^2e^{-(2a+1)q}}{e^{(2a+1)q}-r}\right], \quad s=2a+1;$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[e^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\} + \right.$$

$$\left. + 2r\frac{(e^q-e^{-q})^{2a+1}}{e^{(2a+1)q}-r} - 1\right] \quad \ldots (186)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Cos.sx}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[re^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - \right.\right.$$

$$\left.\left.- 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\right], s > 2a+1; \ldots (187)$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[re^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\} + \right.$$

$$\left. + (1+r^2)\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{(1+r^2)re^{-(2a+1)q}}{e^{(2a+1)q}-r}\right], \quad s=2a+1;$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(1+r^2)\left\{\frac{(e^q-e^{-q})^{2a+1}}{e^{(2a+1)q}-r} - 1\right\} + \right.$$

$$\left. + re^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\}\right] \quad \ldots (188)$$

Des quatre intégrales non numérotées, la première est déjà déduite dans la formule (180), la seconde dans la formule (182), la troisième dans la formule (176) et la quatrième dans la formule (178).

Ensuite les équations générales (T) à (N) nous fournissent les suivantes, lorsque nous employons les mêmes suppositions (aa) et les mêmes formules de réduction (ab) pour les sommations, qui se présentent ici.

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Cos.px}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\left[e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r}{e^{qs}-r}\right], \quad 2p \overline{\overline{>}} 2a \overline{\overline{<}} s;$$

$$= \frac{2^{-a-1}}{1-r}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\frac{e^{(s-p)q}+re^{pq}}{e^{qs}-r} \quad \ldots\ldots (189)$$

$$= \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\left[(e^q+e^{-q})^a e^{-pq} - e^{(a-p)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} + e^{(p-a)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} + \right.$$
$$\left. + (e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r}{e^{qs}-r}\right], \quad 2a > 2p \overline{\overline{<}} s;$$
$$\ldots\ldots (190)$$
$$= \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\left[(e^q+e^{-q})^a\frac{e^{(s-p)q}-re^{pq}}{e^{qs}-r} - e^{(a-p)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} - e^{(p-a)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Cos.px.Cos.sx}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-2}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\left[2re^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\right], \quad 2p \overline{\overline{>}} 2a \overline{\overline{<}} s; \quad \ldots (191)$$

$$= \frac{2^{-a-2}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\left[2r\left\{(e^q+e^{-q})^a e^{-pq} - e^{(a-p)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} + e^{(p-a)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}\right\} + \right.$$
$$\left. + (e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\right], \quad 2a > 2p \overline{\overline{<}} s; \quad \ldots (192)$$

Dans les intégrales (190) et (192) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(a-p)$.

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Sin.px.Sin.sx}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1}{e^{qs}-r}, \quad p \overline{\overline{<}} s-a; \ . \ (193)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x.Sin.px}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{x}{q^2+x^2}dx =$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\left[e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{r}{e^{qs}-r}\right], \quad 2p > 4a < s;$$
$$\ldots\ldots (194)$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{(s-p)q}-re^{pq}}{e^{qs}-r}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.\,p\,x}{1-2\,r\,Cos.\,s\,x+r^2}\,\frac{x}{q^2+x^2}\,dx= \\
&=(-1)^a\,2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[e^{-pq}\,(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}- \\
&\qquad -e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}+(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{-pq}-e^{pq})\,\frac{r}{e^{qs}-r}\Big] \\
&=(-1)^a\,2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\,\frac{e^{(s-p)q}-r\,e^{pq}}{e^{qs}-r}- \\
&\qquad -e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]
\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}, s>2p<4a,\\ p \text{ entier;}\\ \ldots\;(195)\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&=(-1)^a\,2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{(s-p)q}-r\,e^{pq}}{e^{qs}-r}-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}- \\
&\qquad\qquad -e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]
\end{aligned}\quad\begin{array}{l}, s>2p<4a,\\ p \text{ fraction-}\\ \text{naire;}\\ \ldots\;(196)\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}
&=(-1)^a\,2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[-r\left\{(1-e^{-2pq})\,(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\}+ \\
&\qquad +(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\,\frac{r^2\,e^{-qs}}{e^{qs}-r}\right\}\Big] \\
&=(-1)^a\,2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}-r\,\frac{e^{pq}-e^{-pq}}{e^{(p+2a)q}-r}\right\}+r\Big]
\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}, p=s-2a,\\ 2p>s>4a;\\ \ldots\;(197)\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}
&=(-1)^a\,2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[e^{-pq}\,(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}- \\
&\qquad -e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}-r\left\{(1-e^{-2pq})\,(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\}+ \\
&\qquad +(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{-pq}-e^{pq})\,\frac{r^2\,e^{-qs}}{e^{qs}-r}\Big] \\
&=(-1)^a\,2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}-r\,\frac{e^{pq}-e^{-pq}}{e^{(p+2a)q}-r}\right\}+ \\
&\qquad +r-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]
\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}, p=s-2a,\\ 2p<s<4a,\\ p \text{ entier;}\\ \ldots\;(198)\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}
&=(-1)^a\,2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}-r\,\frac{e^{pq}-e^{-pq}}{e^{(p+2a)q}-r}\right\}+ \\
&\qquad +r-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]
\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}, p=s-2a,\\ 2p<s<4a,\\ p \text{ fraction-}\\ \text{naire;}\\ \ldots\;(199)\end{array}$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.px.Cos.sx}{1-2r\,Cos.sx+r^2}\frac{x}{q^2+x^2}dx = (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\Big[2re^{-pq}+$$

$$+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\Big],\ 2p>4a<s;\ \dots\ (200)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}+2r\Big\{(e^q-e^{-q})^{2a}e^{-pq}-$$

$$-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big\}\Big],s>2p<4a,p\text{ entier};\ .\ (201)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}+2r\Big\{(e^q-e^{-q})^{2a}e^{-pq}-$$

$$-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big\}\Big],s>2p<4a,p\text{ fract.};\ .\ (202)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[-(1+r^2)\frac{1}{2}\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{re^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1+r^2}{2}\frac{re^{-sq}}{e^{sq}-r}\Big\}\Big]\quad ,\ p=s-2a,\ 2p>s>4a;$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{2re^{-pq}-\quad \dots\dots\ (203)$$

$$-(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1+r^2}{e^{(p+2a)q}-r}\Big\}+2(1+r^2)\Big]$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{2re^{-pq}-(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1+r^2}{e^{(p+2a)q}-r}\Big\}+\quad ,\ 2p<s<4a,\ p=s-2a,\ p\text{ entier},$$

$$+2(1+r^2)-2re^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-2re^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\ \dots\ (204)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{2re^{-pq}-(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1+r^2}{e^{(p+2a)q}-r}\Big\}+\quad ,\ 2p<s<4a,\ p=s-2a,\ p\text{ fractionnaire};$$

$$+2(1+r^2)-2re^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-2re^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\ \dots\ (205)$$

Dans les intégrales (195) à (205) d est le plus grand nombre entier contenu dans $(a-\frac{1}{2}p)$.

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Cos.px.Sin.sx}{1-2r\,Cos.sx+r^2}\frac{x}{q^2+x^2}dx=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{e^{qs}-r}\ ,p<s-2a;\ \dots\ (206)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Cos.px.Sin.sx}{1-2r\,Cos.x+r^2}\frac{x}{q^2+x^2}dx = (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{r}\Big[\frac{1}{2}r\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\frac{r^2e^{-(p+2a)q}}{e^{(p+2a)q}-r}\Big]$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{e^{(p+2a)q}-r}-1\Big]$$

$, p=s-2a;$ . . . (207)

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.px}{1-2r\,Cos.sx+r^2}\frac{x}{q^2+x^2}dx =$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big[e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r}{e^{qs}-r}\Big]$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{(s-p)q}+re^{pq}}{e^{qs}-r}$$

$, 2p>4a+2<s;$ . . . . . . (208)

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{(s-p)q}+re^{pq}}{e^{qs}-r}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$

$$-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$

$, s>2p<4a+2, p$ entier; . . (209)

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{(s-p)q}+re^{pq}}{e^{qs}-r}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$

$$-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$

$, s>2p<4a+2, p$ fractionnaire; . . (210)

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[r\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r^2e^{-sq}}{e^{qs}-r}\Big\}\Big]$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r}{e^{(p+2a+1)q}-r}\Big\}-r\Big]$$

$, 2p<s<4a+2, p=s-2a-1;$ . . . . . (211)

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[e^{-(p-2a-1)q}(1-e^{-2q})^{2a+1}-$$

$$-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}+$$

$$+r\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r^2e^{-(p+2a+1)q}}{e^{(p+2a+1)q}-r}\Big]$$

$, 2p<s<4a+2, p=s-2a-1, p$ entier;

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.p\,x}{1-2\,r\,Cos.s\,x+r^2}\,\frac{x}{q^2+x^2}\,dx =$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r}{e^{(p+2a+1)q}-r}\Big\}-r-$$
$$-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$

$2p<s<4a+2$, $p=s-2a-1$, p entier; ..... (212)

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r}{e^{(p+2a+1)q}-r}\Big\}-r-$$
$$-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$

$2p<s<4a+2$, $p=s-2a-1$, p fractionnaire; ...... (213)

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Cos.p\,x.\,Cos.s\,x}{1-2\,r\,Cos.s\,x+r^2}\,\frac{x}{q^2+x^2}\,dx = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big[2\,r\,e^{-pq}+$$
$$+(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\Big]$$

$2p>4a+2<s$; .. (214)

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}+2\,r\Big\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-$$
$$-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}\Big]$$

$s>2p<4a+2$, p entier; .. (215)

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}+2\,r\Big\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-$$
$$-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}\Big]$$

$s>2p<4a+2$, p fractionnaire; . (216)

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(1+r^2)\,\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+$$
$$+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{2\,r\,e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})(1+r^2)\frac{r\,e^{-sq}}{e^{qs}-r}\Big\}\Big]$$
$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{2re^{-pq}+(1+r^2)\frac{e^{pq}+e^{-pq}}{e^{(p+2a+1)q}-r}\Big\}-(1+r^2)\Big]$$

$p=s-2a-1$, $2p>s>4a+2$; ..... (217)

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{2re^{-pq}+(1+r^2)\frac{e^{pq}+e^{-pq}}{e^{(p+2a+1)q}-r}\Big\}-$$
$$-(1+r^2)+2r\Big\{e^{-(p-2a-1)q}(1-e^{-2q})^{2a+1}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$
$$-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}\Big]$$

$p=s-2a-1$, $2p<s<4a+2$, p entier; .... (218)

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.px.Cos.sx}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\frac{\pi}{1-r^2}\Bigg[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Bigg\{2re^{-pq}+ +(1+r^2)\frac{e^{pq}+e^{-pq}}{e^{(p+2a+1)q}-r}\Bigg\}-(1+r^2)+2r\Bigg\{e^{-(p-2a-1)q}(1-e^{-2q})^{2a+1}- -e^{(2a+1-p)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Bigg\}\Bigg]\quad \begin{matrix},p=s-2a-1,\\ 2p<s<4a+2,\\ p\text{ fractionnaire};\end{matrix}\;\ldots\ldots\;(219)$$

Dans ces intégrales (209) jusques à (219) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}\,(2a+1-p)$.

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\,px.\,Sin.\,sx}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\frac{x}{q^2+x^2}dx=$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}-e^{-pq})\,\frac{1}{e^{qs}-r}\;,\;p<s-2a-1;\;\ldots\;(220)$$

$$\left.\begin{aligned}&=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{r}\Bigg[\frac{1}{2}\,r\,\{(1-e^{-2pq})\,(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+\\&\qquad\qquad+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}-e^{-pq})\,\frac{1}{2r}\,\frac{r^2\,e^{-qs}}{e^{qs}-r}\Bigg]\\&=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\Bigg[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,\frac{(e^{pq}-e^{-pq})}{e^{(p+2a+1)q}-r}-1\Bigg]\end{aligned}\right\}\begin{matrix},\;p=s-2a-1;\\ \ldots\ldots\ldots\;(221)\end{matrix}$$

De ce dernier groupe d'intégrales (189) à (221) on peut déduire encore des résultats remarquables, en combinant quelques unes de ces intégrales, entre lesquelles il existe une certaine analogie, par voie d'addition et de soustraction.

Ainsi la somme et la différence des intégrales (191) et (192) avec (195) nous fournissent :

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Cos.\{(s+p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\Bigg[e^{-pq}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)+\frac{r^2e^{pq}}{e^{qs}-r}\Bigg],\begin{matrix}p\leqq s-a,\\ 2p\geqq 2a\leqq s;\end{matrix}$$

$$=\frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\Bigg[(e^q+e^{-q})^a\left\{e^{-pq}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)+\frac{r^2e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}-$$

$$-e^{(a-p)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+e^{(p-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\Bigg]\;,\;p\leqq s-a\,,2a>2p\leqq s;$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Cos.\{(s-p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\frac{r\,e^{(s-p)q}+e^{pq}}{e^{qs}-r}\;,p\leqq s-a,\,2p\geqq 2a\leqq s;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{Cos.^a x. Cos. \{(s-p)x\}}{1-2r Cos. sx + r^2} \frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^q+e^{-q})^a \frac{re^{(s-p)q}+e^{pq}}{e^{qs}-r} -$$

$$- e^{(a-p)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} + e^{(p-a)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}\Big], \ p \leqq s-a, 2a > 2p \leqq s;$$

Dans ces formules d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(a-p)$.

Lorsqu'on prend t pour $s+p$ dans les deux premières formules, ainsi que pour $s-p$ dans les deux dernières, alors les intégrales elles-mêmes acquièrent bien la même forme, mais les résultats diffèrent à raison des inéquations, auxquelles t, s et a sont assujettis, et qui les lient entre eux mutuellement; ces conditions peuvent facilement s'établir à l'aide des inéquations qui ont lieu entre p, s et a, et l'on y a ajouté la première, qui est quelque fois une conséquence nécessaire des deux autres, afin de montrer plus clairement la différence, qui y existe. Il vient:

$$\int_0^{\infty} \frac{Cos.^a x. Cos. tx}{1-2r Cos. sx + r^2} \frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a \Big\{e^{(s-t)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big) +$$

$$+ e^{(t-s)q}\frac{r^2}{e^{qs}-r}\Big\}, t \leqq 2s-a, s \geqq 2a, t \geqq s+a \ . \ (222)$$

$$= \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^q+e^{-q})^a \Big\{e^{(s-t)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big) + e^{(t-s)q}\frac{r^2}{e^{qs}-r}\Big\} -$$

$$- e^{(a+s-t)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} + e^{(t-s-a)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}\Big] \ldots\ldots\ (223)$$

où d est le plus grand nombre contenu dans $\frac{1}{2}(a+s-t)$, $t \leqq 2s-a$, $2t \leqq 3s$, $t < s+a$.

$$= \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a \frac{re^{tq}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r}, \ t \geqq a, s \geqq 2a, t \leqq s-a; \ldots\ldots\ (224)$$

$$= \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^q+e^{-q})^a \frac{re^{tq}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r} - e^{(a+t-s)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} -$$

$$+ e^{(s-t-a)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}\Big], \ t \geqq a, 2t \geqq 3s, t > s-a; \ \ldots\ (225)$$

où d est le plus grand nombre contenu dans $\frac{1}{2}(a+t-s)$.

La somme et la différence des intégrales (200), (201) et (202) avec (206), et de même des intégrales (203), (204) et (205) avec (207) nous donnent:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.\{(s+p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{r^2\,e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}\ ,\ p<s-2a, 2p>4a<s;$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)-\frac{r^2\,e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}-\right.$$
$$\left.-r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right]\ ,\ p<s-2a,\ s>2p<4a,\ p\text{ entier};$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)-\frac{r^2\,e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}-\right.$$
$$\left.-r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right]\ ,\ p<s-2a,\ s>2p<4a,\ p\text{ fractionnaire};$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{r\,e^{-pq}\frac{e^{sq}-2r}{e^{sq}-r}+\frac{e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}+r^2\right]\ ,\ p=s-2a,\ 2p>s>4a;$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{r\,e^{-pq}\frac{e^{qs}-2r}{e^{qs}-r}+\frac{e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}+r^2-\right.$$
$$\left.-r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right]\ ,\ p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p\text{ entier};$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{r\,e^{-pq}\frac{e^{qs}-2r}{e^{qs}-r}+\frac{e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}+r^2-\right.$$
$$\left.-r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right]\ ,\ p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p\text{ fractionnaire};$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.\{(s-p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{pq}-re^{(s-p)q}}{e^{qs}-r}\ ,\ p<s-2a,\ 2p>4a<s;$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{pq}-r\,e^{(s-p)q}}{e^{qs}-r}+r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+\right.$$
$$\left.+r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right]\ ,\ p<s-2a,\ s>2p<4a,\ p\text{ entier};$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{pq}-r\,e^{(s-p)q}}{e^{qs}-r}+re^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+\right.$$
$$\left.+r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right]\ ,\ p<s-2a,\ s>2p<4a,\ p\text{ fractionnaire};$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x\, Sin.\{(s-p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{-pq}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}-r\Big) - \frac{r^2\,e^{pq}}{e^{qs}-r}\Big\} - 1\Big],\ p=s-2a,\ 2p>s>4a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{-pq}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}-r\Big)-\frac{r^2\,e^{pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-1+ + r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} + r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big],\ p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p \text{ entier};$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{-pq}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}-r\Big)-\frac{r^2\,e^{pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-1+ + r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} + r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big],\ p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p \text{ fractionnaire};$$

Dans ces intégrales d est le plus grand nombre entier contenu dans $(a-\frac{1}{2}p)$.

Lorsque nous prenons dans les six premières de ces équations t pour $s+p$, de même t pour $s-p$ dans les six dernières, alors la fonction intégrée devient de même forme, tandis que les inéquations différentes entre elles en indiquent les divers cas, pour lesquels chaque valeur spéciale peut exister. Ainsi l'on a :

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.\,tx}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\Big[e^{(s-t)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big) - \frac{r^2\,e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\Big],\ t>6a,\ s>4a,\ t>s+2a;\ \ldots\ldots (226)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{(s-t)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big)-\frac{r^2\,e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\Big\} - - r\,e^{(2a+s-t)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} - r\,e^{(t-s-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big],\ 2t<3s,\ t<2(s-a),\ t<s+2a,\ t-s \text{ entier};\ \ldots\ldots (227)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{(s-t)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big)-\frac{r^2\,e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\Big\} - - r\,e^{(2a+s-t)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} - r\,e^{(t-s-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big],\ 2t<3s,\ t<2(s-a),\ t<s+2a,\ t-s \text{ fractionnaire};\ .\ (228)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{r\,e^{(s-t)q}\frac{e^{qs}-2r}{e^{qs}-r}+\frac{e^{(t-s)q}}{e^{sq}-r}\Big\}+r^2\Big],\ t=2(s-a),\ s>4a;\ \ldots\ldots\ldots (229)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x . Sin. t x}{1 - 2 r Cos. s x + r^2} \frac{x\, dx}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \Big\{ r e^{(s-t)q} \frac{e^{qs} - 2r}{e^{qs} - r} + \frac{e^{(t-s)q}}{e^{qs} - r} \Big\} + + r^2 - r e^{(2a+s-t)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - r e^{(t-s-2a)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big] , t = 2(s-a). s < 4a, t-s \text{ entier}; . (230)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \Big\{ r e^{(s-t)q} \frac{e^{qs} - 2r}{e^{qs} - r} + \frac{e^{(t-s)q}}{e^{qs} - r} \Big\} + + r^2 - r e^{(2a+s-t)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - r e^{(t-s-2a)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big] , t = 2(s-a), s < 4a, t-s \text{ fractionnaire}; \dots (231)$$

Dans les formules (226) à (231) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}$ $(2a + s - t)$.

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} (e^q - e^{-q})^{2a} \frac{e^{(s-t)q} - r e^{tq}}{e^{qs} - r}, \quad t > 2a, s > 4a, t < s - 2a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \frac{e^{(s-t)q} - r e^{tq}}{e^{qs} - r} + r e^{(2a+t-s)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} + + r e^{(s-t-2a)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big], t > 2a, 2t > s, t > s - 2a, t-s \text{ entier}; (232)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \frac{e^{(s-t)q} - r e^{tq}}{e^{qs} - r} + r e^{(2a+t-s)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} + + r e^{(s-t-2a)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big], t > 2a, 2t > s, t > s - 2a, t-s \text{ fractionnaire}; (233)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \Big\{ e^{(t-s)q} \Big(\frac{1}{e^{qs} - r} - r \Big) - \frac{r^2 e^{(s-t)q}}{e^{qs} - r} \Big\} - 1 \Big], t = 2a, s > 4a; \dots (234)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \Big\{ e^{(t-s)q} \Big(\frac{1}{e^{qs} - r} - r \Big) - \frac{r^2 e^{(s-t)q}}{e^{qs} - r} \Big\} - - 1 + r e^{(2a+t-s)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} + r e^{(s-t-2a)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big], t = 2a, s < 4a, t-s \text{ entier}; (235)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \Big\{ e^{(t-s)q} \Big(\frac{1}{e^{qs} - r} - r \Big) - \frac{r^2 e^{(s-t)q}}{e^{qs} - r} \Big\} - - 1 + r e^{(2a+t-s)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} + r e^{(s-t-2a)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big], t = 2a, s < 4a, t-s \text{ fractionnaire}; \dots (236)$$

Dans les intégrales (252) à (256) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}$ $(2a + t - s)$.

L'équation non numérotée, qui se trouve entre les deux intégrales (251) et (252) a déjà été déduite dans la formule (194). Lorsqu'on compare ces résultats des formules (226) à (256) avec les autres déjà trouvés précédemment dans les formules (194) à (199) pour la même intégrale, on voit qu'elle est évaluée par conséquence dans dix-sept cas différens, qui dépendent de relations mutuelles très-variées entre les élémens t, s et a. Voilà certainement un exemple bien remarquable, de quelle importance les valeurs spéciales des constantes sous le signe d'intégration peuvent être quelquefois à l'égard de la valeur d'une intégrale définie, et combien on a besoin de circonspection, lorsqu'on veut décider précisement pour quelles limites d'une constante quelconque une intégrale définie acquierre une valeur donnée; nos théorèmes offrent des mesures de précaution à cet effet, que l'on n'a parfois que trop négligées. Un second exemple pour l'application de ces observations se trouve encore dans l'intégrale suivante.

Lorsqu'on combine les intégrales (220) avec les autres (214), (215) et (216) par la voie d'addition et de soustraction, et encore de même l'intégrale (221) avec les autres (217), (218) et (219), l'on obtient:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.\{(s+p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\frac{x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left[e^{-pq}\left(r+\frac{1}{e^{qs}-r}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{r^2\,e^{pq}}{e^{qs}-r}\right].\ p < s-2a-1,\ 2p > 4a+2 < s:$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{e^{-pq}\left(r+\frac{1}{e^{qs}-r}\right)+\frac{r^2\,e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}-\right.$$
$$\left.-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right],\ p<s-2a-1,\ s>2p<4a+2,\ p \text{ entier};$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{e^{-pq}\left(r+\frac{1}{e^{qs}-r}\right)+\frac{r^2 e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}-\right.$$
$$\left.-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right],\ p<s-2a-1,\ s>2p<4a+2,\ p \text{ fractionnaire};$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{r\,e^{-pq}+\frac{r^2\,e^{pq}+e^{-pq}}{e^{qs}-r}\right\}-r^2\right],\ p=s-2a-1,\ 2p>s>4a+2;$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x . Cos. \{(s+p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{re^{-pq}+\frac{r^2e^{pq}+e^{-pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-r^2-$$

$$-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$

$p=s-2a-1$, $2p<s<4a+2$, p entier;

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{re^{-pq}+\frac{r^2e^{pq}+e^{-pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-r^2-$$

$$-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$

$p=s-2a-1$, $2p<s<4a+2$, p fractionnaire:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x . Cos. \{(s-p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{re^{(s-p)q}+e^{pq}}{e^{qs}-r}, \quad p<s-2a-1,\ 2p>4a+2<s;$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{re^{(s-p)q}+e^{pq}}{e^{qs}-r}-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$

$$-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big], \quad p<s-2a-1,\ s>2p<4a+2,\ p \text{ entier};$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{re^{(s-p)q}+e^{pq}}{e^{qs}-r}-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$

$$-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big], \quad p<s-2a-1,\ s>2p<4a+2,\ p \text{ fractionnaire}$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{pq}+re^{(s-p)q}}{e^{qs}-r}-1\Big], \quad p=s-2a-1,\ 2p>s>4a+2;$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{pq}+re^{(s-p)q}}{e^{qs}-r}-1-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$

$$-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big], \quad p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2, p \text{ entier};$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{pq}+re^{(s-p)q}}{e^{qs}-r}-1-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$

$$-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big], \quad p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2, p \text{ fractionnaire};$$

Ici d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a+1-p)$.

Lorsqu'on prend de nouveau t pour $s+p$ dans les six premières formules et de même t pour $s-p$ dans les six dernières, l'on obtient ainsi douze expressions différentes pour la même intégrale, qui valent respectivement pour des valeurs différentes de t, c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Cos.tx}{1-2rCos.sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{e^{(s-t)q}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)+\frac{r^2e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\right\},\ t>6a+3,\ s>4a+2,\ t>s+2a+1\ \ldots\ (237)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Bigg[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{e^{(s-t)q}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)+\frac{r^2e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\right\}-re^{(2a+1+s-t)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(t-s-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Bigg],\ 2t<3s,\ t<2s-2a-1,\ t<s+2a+1,\ t-s\text{ entier}; (238)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Bigg[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{e^{(s-t)q}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)+\frac{r^2e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\right\}-re^{(2a+1+s-t)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(t-s-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Bigg],\ 2t<3s,\ t<2s-2a-1,\ t<s+2a+1,\ t-s\text{ fractionnaire};\ \ldots\ (239)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{re^{(s-t)q}+\frac{r^2e^{(t-s)q}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r}\right\}-r^2\right],\ t=2s-2a-1,\ s<4a+2;\ .\ (240)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Bigg[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{re^{(s-t)q}+\frac{r^2e^{(t-s)q}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r}\right\}-r^2-re^{(2a+1+s-t)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(t-s-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Bigg],\ t=2s-2a-1,\ s<4a+2,\ t-s\text{ entier};\ .\ (241)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Bigg[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{re^{(s-t)q}+\frac{r^2e^{(t-s)q}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r}\right\}-r^2-re^{(2a+1+s-t)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(t-s-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Bigg],\ t=2s-2a-1,\ s<4a+2,\ t-s\text{ fractionnaire};\ .\ .\ (242)$$

Dans les formules (257) à (242) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a+1+s-t)$.

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{re^{tq}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r},\ t>2a+1,\ s>4a+2,\ t<s-2a-1;$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. \, Cos. \, t x}{1 - 2 r \, Cos. \, s x + r^2} \frac{x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \frac{r e^{tq} + e^{(s-t)q}}{e^{qs} - r} - r \, e^{(2a+1+t-s)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- r \, e^{(s-t-2a-1)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big], t > 2a+1, 2t > s, t > s - 2a - 1, t - s \text{ entier}; \quad (243)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \frac{r e^{tq} + e^{(s-t)q}}{e^{qs} - r} - r \, e^{(2a+1+t-s)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- r \, e^{(s-t-2a-1)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big], t > 2a+1, 2t > s, t > s - 2a - 1, t - s \text{ fractionnaire}; \quad (244)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \frac{e^{(s-t)q} + r e^{tq}}{e^{qs} - r} - 1 \Big], t = 2a+1, s > 4a+2 \quad . \quad (245)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \frac{e^{(s-t)q} + r e^{tq}}{e^{qs} - r} - 1 - r e^{(2a+1+t-s)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- r \, e^{(s-t-2a-1)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big], t = 2a+1, s < 4a+2, t - s \text{ entier}; \ldots \ldots (246)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \frac{e^{(s-t)q} + r e^{tq}}{e^{qs} - r} - 1 - r e^{(2a+1+t-s)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- r \, e^{(s-t-2a-1)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big], t = 2a+1, s < 4a+2, t - s \text{ fractionnaire}; \ . \ (247)$$

où dans les intégrales (243) à (247) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}$ $(2a + 1 - s + t)$.

Lorsqu'on compare ces formules avec les intégrales précédemment déduites (208) à (215), on voit en premier lieu, que l'intégrale non numérotée ici (qui est placée entre les formules (242) et (243)) est identique avec la formule (208): encore voit-on que la fonction sous le signe d'intégration est la même, de sorte que les formules (208) à (215) conjointement avec ces dernières (237) à (247) nous fournissent dix-sept valeurs distinctes pour autant de suppositions différentes à l'égard de la dépendance mutuelle des constantes t, s et a, tout comme il a été annoncé antérieurement.

Dans toutes les intégrales (185) à (247) a doit être entier, tandis que p, q, s et t sont absolument arbitraires, en tant qu'ils ne sont liés chaque fois par des conditions spéciales: la valeur numérique de r au contraire est assujettie à la condition de rester toujours moindre que l'unité, puisque dans le cas contraire les formules (aa) ne vaudraient plus; mais par conséquence r

peut devenir négatif, et dans ce cas-là le dénominateur acquiert la forme correspondante

$$1 + 2r\,Cos.\,sx + r^2$$

avec la même équation de condition que r^2 doit rester au dessous de l'unité. Cela nous offre une occasion convenable, de prendre la somme ou la différence de deux intégrales semblables, qui ne diffèrent que par leurs dénominateurs respectifs, et d'en acquérir ainsi des nouvelles, qui ne contiennent plus des sommations à l'égard de a ou de d dans leurs valeurs correspondantes.

18. Car lorsqu'on a évalué une intégrale de la forme

$$\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2} = f(r), \text{ où } r^2 < 1;$$

on a de même encore:

$$\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1+2r\,Cos.\,sx+r^2} = f(-r), \ (r^2 < 1);$$

et par conséquence

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1-2rCos.sx+r^2}+\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1+2rCos.sx+r^2}=f(r)+f(-r)=2(1+r^2)\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}\\
&\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1-2rCos.sx+r^2}-\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1+2rCos.sx+r^2}=f(r)-f(-r)=4r\int_0^\infty \frac{F(x)\,Cos.\,sx\,dx}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}
\end{aligned}\right\}(ac)$$

Si l'on considère qu'en général on a

$$\frac{1}{m-r}-\frac{1}{m+r}=\frac{2r}{m^2-r^2} \text{ et } \frac{1}{m-r}+\frac{1}{m+r}=\frac{2m}{m^2-r^2},$$

$$\frac{r}{m-r}-\frac{-r}{m+r}=\frac{2mr}{m^2-r^2} \text{ et } \frac{r}{m-r}+\frac{-r}{m-r}=\frac{2r^2}{m^2-r^2},$$

les intégrales (183), (184), (185), (187), (188) nous fournissent les suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a}x.\,Cos.\,sx}{1-2r^2\,Cos.\,2sx+r^4}\,\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-2a-1}}{1-r^2}\,\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a}\,\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2},\ s\geqq 2a;\\
&\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1}x.\,Cos.\,sx}{1-2r^2\,Cos.\,2sx+r^4}\,\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-2a-2}}{1-r^2}\,\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a+1}\,\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2},\ s\geqq 2a+1;
\end{aligned}\right\}. \ (248)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.sx}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^a2^{-2a-1}\frac{\pi}{1+r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}\,,s>2\,a;.(249)$$

$$=(-1)^a2^{-2a-1}\frac{\pi}{1+r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{2aq}}{e^{4aq}-r^2}-1\right],s=2\,a;\ .\ (250)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,s\,x}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}\,,s>2\,a+1;\ .\ .\ .\ (251)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}-1\right],s=2a+1;.(252)$$

Les intégrales non numérotées là, ainsi que l'intégrale (186), auraient conduit aux mêmes résultats: les deux valeurs de l'intégrale (248) nous montre qu'ici la distinction entre la parité et l'imparité de a s'évanouit. De même manière les intégrales (189) et (190), tout comme les autres (191) et (192), les intégrales (193), (194) à (199), tout comme les autres (200) à (205), les intégrales (206) et (207), (208) à (213), tout comme les formules (214) à (219), les intégrales enfin (220), (221) nous fourniront:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Cos\,p x.Cos.sx}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-a-2}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}\ \left.\begin{matrix},\ 2p\geqq 2a\leqq s,\\ \text{ou } 2a>2p\leqq s;\end{matrix}\right\}\ .\ (253)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Sin.px.Sin.sx}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-a-2}}{1+r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}\,,\ p\leqq s-a;\ .\ (254)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.\,p\,x.\,Cos.\,s\,x}{1-2\,r^2\,Cos.\,2\,s\,x+r^4}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}\ \left.\begin{matrix},\ 2\,p>4\,a<s,\\ \text{ou } s>2\,p<4\,a;\end{matrix}\right\}\ .\ (255)$$

$$=(-1)^a2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}+1\right]\left.\begin{matrix},\ p=s-2\,a\\ \text{et } 2\,p>s>4\,a,\\ \text{ou } 2\,p<s<4\,a;\end{matrix}\right\}.(256)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin^{2a}x.\,Cos.\,p\,x.\,Sin.\,s\,x}{1-2\,r^2\,Cos.\,2\,s\,x+r^4}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a2^{-2a-2}\frac{\pi}{1+r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}\,,p<s-2\,a;\ .\ (257)$$

$$=(-1)^a2^{-2a-2}\frac{\pi}{1+r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}-1\right],p=s-2\,a;\ .\ (258)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x . Cos. p x . Cos. s x}{1 - 2 r^2 \, Cos. 2 s x + r^4} \frac{x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1 - r^2} (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \frac{e^{qs}}{e^{2qs} - r^2}, \left\{ \begin{array}{l} 2p > 4a + 2 < s, \\ \text{ou } s > 2p < 4a + 2 ; \end{array} \right. \quad (259)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1 - r^2} \left[(e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \frac{e^{qs}}{e^{2qs} - r^2} - 1 \right], \left\{ \begin{array}{l} p = s - 2a - 1 \\ \text{et } 2p > s > 4a + 2, \\ \text{ou } 2p < s < 4a + 2 ; \end{array} \right. \quad (260)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x . Sin. p x . Sin. s x}{1 - 2 r^2 \, Cos. 2 s x + r^4} \frac{x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1 + r^2} (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) \frac{e^{qs}}{e^{2qs} - r^2}, \; p < s - 2a - 1 ; \quad (261)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1 + r^2} \left[(e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) \frac{e^{qs}}{e^{2qs} - r^2} - 1 \right], \; p = s - 2a - 1 ; \quad (262)$$

Ici les cas auparavant distincts tombent pour la plupart ensemble: ainsi l'intégrale (255) est devenue la valeur commune de deux intégrales, comme les intégrales (255), (256), (259) et (260) même de trois autres. Les résultats sont devenus bien simples, en ce qu'ils ne contiennent plus de sommations. L'on pourrait prendre partout ici r' pour r^2, parce que sous le signe d'intégration r ne se trouve que d'une puissance paire et cela est devenu le cas de même dans les valeurs correspondantes. Or, puisque la valeur numérique de r doit rester moindre que l'unité, r' serait lui-même assujetti à la même condition, et ne saurait devenir négatif.

Mais tout comme au paragraphe 15, l'on pourrait très-bien évaluer toutes les intégrales (185) à (262) pour le cas où r^2 devrait toujours surpasser l'unité. On n'aurait qu'à prendre $\frac{1}{r'}$ au lieu de r, dont s'ensuivrait une même forme pour les fonctions sous le signe d'intégration, puisque

$$1 \pm 2 r \, Cos. s x + r^2 = 1 \pm \frac{2}{r'} Cos. s x + \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{r'^2} (1 \pm 2 r' \, Cos. s x + r'^2),$$

et que c'est seulement dans ce dénominateur que r entre dans la fonction en question. Les valeurs aussi changeraient peu elles mêmes, parce que les puissances de r deviendraient négatives et que les dénominateurs $1 \pm r^2$ et $e^{qs} - r$ seraient remplacés par les nouveaux $\frac{1}{r'^2} (r'^2 \pm 1)$ et $\frac{1}{r'} (r' e^{qs} - 1)$.

19. La supposition suivante nous donne encore une application importante des formules (P) à (Y):

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x) = e^{r\,Cos.sx}\,Cos.(r\,Sin.\,s\,x) = \sum_0^\infty \frac{r^n}{1^{n/1}}\,Cos.\,n\,s\,x \\ \varphi_2(x) = e^{r\,Cos.sx}\,Sin.(r\,Sin.\,s\,x) = \sum_1^\infty \frac{r^n}{1^{n/1}}\,Sin.\,n\,s\,x\end{array}\right\}, \; r^2 < \infty\,; \;\ldots\ldots\ldots (ad)$$

Lorsqu'on les compare avec les formules (a) du paragraphe premier, on trouve que

$$A_0 = 1 \;\;,\;\; A_n = \frac{r^n}{1^{n/1}} \;\;,\;\; B_n = \frac{r^n}{1^{n/1}} \;\;,\;\; c = \infty\,.$$

Pour les sommations correspondantes on a toujours auprès de cette application:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_1^\infty A_n e^{-nsq} = \sum_1^\infty B_n e^{-nsq} = \sum_1^\infty \frac{r^n}{1^{n/1}} e^{-nsq} = \sum_1^\infty \frac{(re^{-sq})^n}{1^{n/1}} = -1 + \sum_0^\infty \frac{(re^{-sq})^n}{1^{n/1}} = e^{re^{-sq}} - 1 \\ \sum_2^\infty A_n e^{-nsq} = \sum_2^\infty B_n e^{-nsq} = \sum_2^\infty \frac{(re^{-sq})^n}{1^{n/1}} = -1 - re^{-sq} + \sum_0^\infty \frac{(re^{-sq})^n}{1^{n/1}} = e^{re^{-sq}} - 1 - re^{-sq}\end{array}\right\} .(ae)$$

Et ce sont les seules sommations qui se présentent, outre celles qui dépendent de a et qui par conséquence sont entièrement indépendantes de la forme des fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$.

Afin d'être plus courts nous employerons tout de suite les résultats des formules (ae), lorsqu'on substitue les suppositions (ad) dans les théorèmes généraux (P) à (S). De telle sorte nous sommes conduits aux résultats, qui suivent:

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Cos.(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{Cos.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\Bigg[\binom{2a}{a} + 2\sum_1^a \binom{2a}{n+a} e^{-2nq} +$$
$$+ (e^q + e^{-q})^{2a}\left(e^{re^{-qs}} - 1\right)\Bigg]\,,\; s \geqq 2a\,;\;\ldots\ldots\ldots (263)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Cos.(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{Cos.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Bigg[2\sum_0^a \binom{2a+1}{n+a+1} e^{-(2n+1)q} +$$
$$+ (e^q + e^{-q})^{2a+1}\left(e^{re^{-qs}} - 1\right)\Bigg]\,,\; s \geqq 2a+1\,;\;\ldots\ldots (264)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Sin.(r\,Sin.sx)\,\frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\,(e^q - e^{-q})^{2a}\left(e^{re^{-qs}} - 1\right), s > 2a\,;. (265)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Sin.(r\,Sin.\,s\,x)\frac{x\,Sin.^{2a}\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\,\Big[r\,\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\} +$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{re^{-2aq}}-1-re^{-2aq})\Big] = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{re^{-qs}}-1)-r\Big], s=2a;\ .\ (266)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Cos.(r\,Sin.\,s\,x)\frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} -$$

$$-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2\,a+1}{n}e^{2nq}\Big\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{re^{-qs}}-1)\Big]\ ,\ s>2\,a+1;\ \ldots\ldots\ (267)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+$$

$$+\,r\,\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\,\{e^{re^{-(2a+1)q}}-1-re^{-(2a+1)q}\}\Big], s=2a+1;$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+ \quad \ldots\ (268)$$

$$+\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{re^{-(2a+1)q}}-1)-r\Big]$$

Tout de même il vient par l'intermédiaire des théorèmes (T) à (Y):

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Cos.\,(r\,Sin.\,s\,x)\frac{Cos.^a\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\Big[2\,e^{-pq} +$$

$$+\,(e^{pq}+e^{-pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\Big]\ ,\ p \geqq a, s \geqq 2\,a;\ \ldots\ldots\ldots\ (269)$$

$$= 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}\Big[2\Big\{(e^q+e^{-q})^a\,e^{-pq} - e^{(a-p)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq} + e^{(p-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\Big\}+$$

$$+\,(e^q+e^{-q})^a\,(e^{pq}+e^{-pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\Big]\ ;p<a, 2\,p \leqq s;\ .\ (270)$$

où d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(a-p)$.

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}Sin.(rSin.sx)\frac{Cos.^ax.Sin.pxdx}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})(e^{re^{-sq}}-1)\ , p\leqq s-a;\ \ldots\ (271)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Cos.\,(r\,Sin.\,s\,x)\frac{x\,Sin.^{2a}\,x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\Big[2\,e^{-pq} +$$

$$+\,(e^{-pq}-e^{pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\Big]\ ,\ p>2\,a, s>4\,a;\ \ldots\ldots\ldots\ (272)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Cos.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[2\,e^{-pq}\,(e^q-e^{-q})^{2a} - 2\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} -$$

$$-2\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq} + (e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{-pq}-e^{pq})\,(e^{re^{-qs}}-1)\Big]$$

$, p<2a, 2p<s,$ p entier; . (273)

$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[2\,e^{-pq}\,(e^q-e^{-q})^{2a} - 2\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} -$$

$$-2\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq} + (e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{-pq}-e^{pq})\,(e^{re^{-qs}}-1)\Big]$$

$, p<2a, 2p<s,$ p fractionnaire; . . . . . (274)

$$= (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\Big[-\frac{1}{2}r\,\{(1-e^{-2pq})\,(1-e^{-2q})^{2a}-1\} +$$

$$+ (e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{-pq} + (e^{-pq}-e^{pq})\,\frac{1}{2}\,(e^{re^{-sq}}-1-r\,e^{-(p+2a)q}\Big\}\Big]$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\{2\,e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\}+r\Big]$$

$, p = s - 2\,a,$ $2\,p > s > 4\,a;$ . . . . . . (275)

$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\,\{2\,e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\} +$$

$$+ r - 2\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} - 2\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$

$, p = s - 2\,a,$ $2p < s < 4\,a,$ p entier; . . . . (276)

$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\,\{2\,e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\} +$$

$$+ r - 2\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} - 2\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$

$, p = s - 2\,a,$ $2\,p < s < 4\,a,$ p fractionnaire; . . . . . (277)

Ici d est le plus grand nombre entier contenu dans $(a - \frac{1}{2}p)$.

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Sin.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,(e^{re^{-qs}}-1)\ ,\ p < s - 2\,a;\ .\ .\ .\ .\ .\ (278)$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\Big[\frac{1}{2}r\,\{(1+e^{-2pq})\,(1-e^{-2q})^{2a}-1\} +$$

$$+ (e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,\frac{1}{2}\,(e^{re^{-qs}}-1-r\,e^{-(p+2a)q})\Big] =$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,(e^{re^{-qs}}-1)-r\Big]\ ,\ p = s - 2\,a;\ .\ (279)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Cos.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\,(e^q - e^{-q})^{2a+1}\left[2\,e^{-pq} + (e^{pq}+e^{-pq})\,(e^{re^{-qs}}-1)\right] \quad , p > 2a+1,\ s < 4a+2; \ \ldots\ldots (280)$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\Big[2\,e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1} - 2\,e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} -$$
$$- 2\,e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\Big] \quad , p < 2a+1,\ 2p < s,\ p\ \text{entier};\ .(281)$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\Big[2\,e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1} - 2\,e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} -$$
$$- 2\,e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\Big] \quad , p < 2a+1,\ 2p < s,\ p\ \text{fractionnaire};\ .(282)$$

$$= (-1^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[\frac{1}{2}\,r\,\{(1+e^{-2pq})\,(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\} +$$
$$+ (e^q-e^{-q})^{2a+1}\,\Big\{e^{-pq} + (e^{pq}+e^{-pq})\,\frac{1}{2}\,(e^{re^{-sq}} - 1 - r\,e^{-(p+2a+1)q})\Big\}\Big]$$
$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\{2e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})(e^{re^{-sq}}-1)\}-r\right] \quad , p = s-2a-1,\ 2p > s > 4a+2; \ \ldots\ldots\ldots (283)$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\{2\,e^{-pq} + (e^{pq}+e^{-pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\} -$$
$$- r - 2\,e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} - 2\,e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big] \quad , p = s-2a-1,\ 2p < s < 4a+2,\ p\ \text{entier};\ .\ (284)$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\{2e^{-pq} + (e^{pq}+e^{-pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\} -$$
$$- r - 2\,e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} - 2\,e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big] \quad , p = s-2a-1,\ 2p < s < 4a+2,\ p\ \text{fractionnaire};\ .(285)$$

Dans ces formules d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a+1-p)$.

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Sin.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}-e^{-pq})(e^{re^{-qs}}-1),\ p < s-2a-1;\ .\ (286)$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\left[\tfrac{1}{2}\,r\,\{(1-e^{-2pq})\,(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\} +\right.$$
$$\left. + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}-e^{-pq})\,\tfrac{1}{2}\,(e^{re^{-qs}} - 1 - r\,e^{-(p+2a+1)q})\right]$$
$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}-e^{-pq})\,(e^{re^{-sq}}-1) - r\right] \quad , p = s-2a-1; \ \ldots\ldots\ldots (287)$$

L'on pourrait encore déduire de ces divers résultats par leur addition et leur soustraction les intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Cos.\,(p \pm r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{Cos.^a x\,d\,x}{q^2+x^2}\;,\quad \int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Sin.\,(p \pm r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a} x\,d\,x}{q^2+x^2}\;,$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\,Cos.\,(p \pm r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1} x\,d\,x}{q^2+x^2}\;,$$

mais nous passerons outre, parce qu'elles ne donnent pas lieu à des résultats aussi intéressants qu'au paragraphe 17.

Lorsqu'au contraire on prend en considération que ces formules (265) à (287) valent pour toutes les valeurs possibles de r, puisqu'il n'est assujetti qu'aux limites l'infini positif et négatif, il s'ensuit que l'on peut rendre r négatif; cette supposition changera le facteur $e^{r\,Cos.x}$ sous le signe d'intégration en $e^{-r\,Cos.x}$: et à présent l'on peut combiner les intégrales correspondantes par voie d'addition et de soustraction, où il peut arriver que les sommations s'annulent, qui dépendent de a ou de d; et ce sont seulement les résultats de ce genre là, que l'on transcrira ici:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty (e^{r\,Cos.sx} - e^{-r\,Cos.sx})\,Cos.\,(r\,Sin.\,sx)\,\frac{Cos.^{2a} x\,d\,x}{q^2+x^2} = \\
&\qquad = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}(e^q + e^{-q})^{2a}\left(e^{re^{-qs}} - e^{-re^{-qs}}\right)\;,\; s \geqq 2\,a; \\
&\int_0^\infty (e^{r\,Cos.sx} - e^{-r\,Cos.sx})\,Cos.\,(r\,Sin.\,sx)\,\frac{Cos.^{2a+1} x\,d\,x}{q^2+x^2} = \\
&\qquad = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}(e^q + e^{-q})^{2a+1}\left(e^{re^{-qs}} - e^{-re^{-qs}}\right), s \geqq 2\,a+1;
\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(288$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Cos.sx} - e^{-r\,Cos.sx})\,Sin.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a} x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\,(e^q - e^{-q})^{2a}\left(e^{re^{-qs}} + e^{-re^{-qs}} - 2\right)\;,\; s > 2\,a;\;\;\ldots\;(289$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Cos.sx} - e^{-r\,Cos.sx})\,Cos.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1} x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q - e^{-q})^{2a+1}\left(e^{re^{-qs}} - e^{-re^{-qs}}\right)\;,\; s > 2\,a+1;\;\;\ldots\;(290)$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\left[(e^q - e^{-q})^{2a+1}\left(e^{re^{-qs}} - e^{-re^{-qs}}\right) - 2\,r\right], s = 2a+1;\ldots(291$$

$$\int_0^\infty (e^{r Cos. sx} - e^{-r Cos. sx}) Cos. (r Sin. s x) \frac{Cos.^a x. Cos. p x d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= 2^{-a-2} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a (e^{pq} + e^{-pq}) (e^{re^{-qs}} - e^{-re^{-qs}}) \left. \begin{matrix} , p \geqq a, s \geqq 2a; \\ \text{ou } p < a, 2p \leqq s; \end{matrix} \right\} . \quad (292)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Cos. sx} - e^{-r Cos. sx}) Sin. (r Sin. s x) \frac{Cos.^a x. Sin. p x d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= 2^{-a-2} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a (e^{pq} - e^{-pq}) (e^{re^{-qs}} + e^{-re^{-qs}} - 2) , \; p \leqq s - a; \quad . \; (293)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Cos. sx} - e^{-r Cos. sx}) Cos. (r Sin. s x) \frac{x Sin.^{2a} x. Sin. p x d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) (e^{re^{-sq}} - e^{-re^{-sq}}) \left. \begin{matrix} , p > 2a, s < 4a; \\ \text{ou } p < 2a, 2p < s; \end{matrix} \right\} . \; (294)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi (e^q - e^{-q})^{2a} \left[(e^{-pq} - e^{pq}) (e^{re^{-qs}} - e^{-re^{-qs}}) + 2r \right] \left. \begin{matrix} , p = s - 2a, \\ \text{et } 2p > s > 4a, \\ \text{ou } 2p < s < 4a; \end{matrix} \right\} . (295)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Cos. sx} - e^{-r Cos. sx}) \, p \, Sin. (r Sin. s x) \frac{x Sin.^{2a} x. Cos. p x d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{pq} + e^{-pq}) (e^{re^{-sq}} + e^{-re^{-sq}} - 2) , \; p < s - 2a; \; . \; (296)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Cos. sx} - e^{-r Cos. sx}) Cos. (r Sin. s x) \frac{x Sin.^{2a+1} x. Cos. p x d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) (e^{re^{-qs}} - e^{-re^{-qs}}) \left. \begin{matrix} , p > 2a+1, s < 4a+2; \\ \text{ou } p < 2a+1, 2p < s; \end{matrix} \right\} . (297)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \left[(e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) (e^{re^{-sq}} - e^{-re^{-sq}}) - 2r \right] \left. \begin{matrix} , p = s - 2a - 1, \\ \text{et } 2p < s < 4a + 2, \\ \text{ou } 2p < s < 4a + 2; \end{matrix} \right\} . (298)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Cos. sx} - e^{-r Cos. sx}) Sin. (r Sin. s x) \frac{x Sin.^{2a+1} x. Sin. p x d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) (e^{re^{-qs}} + e^{-re^{-qs}} - 2) , p < s - 2a - 1 ; \; (299)$$

Dans la déduction de ces intégrales, on s'est aperçu que plusieurs fois les valeurs dans deux ou trois cas spéciaux, qui auparavant étaient distinctes, coincident ici, de sorte que les valeurs correspondantes deviennent les mêmes pour d'autres rélations mutuelles entre les éléments s, p et a. Dans ces intégrales (288) à (299) on a dû prendre les conditions, qui étaient communes à ces valeurs coincidentes, et ne pas admettre naturellement les autres con-

ditions, qui n'étaient valables que pour chaque cas à part. Encore il faut remarquer que l'intégrale (288) reçoit la même valeur ici, soit pour a pair, soit pour a impair, de sorte que cette distinction s'annulle auprès de cette intégrale, mais aussi auprès d'elle seulement.

Le facteur $e^{r\,Cos.sx} - e^{-r\,Cos.sx}$, qui se présente partout ici sous le signe d'intégration, n'est rien d'autre que la sinus hyperbolique, que Gudermann a introduite dans l'Analyse, et qui est représentée d'ordinaire par le signe $Sin\,h\,p.$; de sorte que le facteur mentionné deviendrait ici $Sin\,h\,p.\,(r\,Cos.\,s\,x)$.

Dans toutes les formules de ce paragraphe la valeur de r est entièrement arbitraire.

20. On pourrait encore acquérir des intégrales, qui correspondent au groupe précédent, lorsqu'on fait usage des suppositions:

$$\left.\begin{aligned}
{}_1\varphi_1(x) &= (e^{r Sin.sx} + e^{-r Sin.sx})\,Cos.(r Cos.sx) = 2\sum_0^{\infty} \frac{r^{2n}}{1^{2n/1}}(-1)^n\,Cos.\,2\,n\,s\,x \\
{}_2\varphi_1(x) &= (e^{r Sin.sx} + e^{-r Sin.sx})\,Sin.(r Cos.sx) = 2\sum_0^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{1^{2n+1/1}}(-1)^n Cos.\{(2n+1)sx\} \\
{}_1\varphi_2(x) &= (e^{r Sin.sx} - e^{-r Sin.sx})\,Cos.(r Cos.sx) = 2\sum_0^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{1^{2n+1/1}}(-1)^n Sin.\{(2n+1)sx\} \\
{}_2\varphi_2(x) &= (e^{r Sin.sx} - e^{-r Sin.sx})\,Sin.(r Cos.sx) = -2\,\frac{r^{2n}}{1^{2n/1}}(-1)^n\,Sin.\,2\,n\,s\,x\,.
\end{aligned}\right\}, r^2 < \infty\,;.(af)$$

Ces formes donnent par la comparaison avec la formule (a) du paragraphe second les rélations respectives:

$$\left.\begin{aligned}
&{}_1A_0 = 2\,,\ {}_1A_1 = 0\,,\ {}_1A_{2n-1} = 0\,, && {}_1A_{2n} = 2\,\frac{r^{2n}}{1^{2n/1}}(-1)^n; \\
&{}_2A_0 = 0\,,\ {}_2A_1 = 2\,r,\ {}_2A_{2n-1} = -2\,\frac{r^{2n-1}}{1^{2n-1/1}}(-1)^n\,,\ {}_2A_{2n} = 0\,; && \\
&{}_1B_1 = 2\,r,\ {}_1B_{2n-1} = -2\,\frac{r^{2n-1}}{1^{2n-1/1}}(-1)^n\,,\ {}_1B_{2n} = 0\,; && \\
&{}_2B_1 = 0,\ {}_2B_{2n-1} = 0 && ,\ {}_2B_{2n} = -2\,\frac{r^{2n}}{1^{2n/1}}(-1)^n;
\end{aligned}\right\}, c = \infty\,;$$

tandis que l'on verra aisément n'avoir besoin que des sommations correspondantes

$$\left.\begin{aligned}
\sum_1^{\infty} {}_1A_{2n}\,e^{-2nsq} = -\sum_1^{\infty} {}_2B_{2n}\,e^{-2nsq} = 2\sum_1^{\infty}\frac{r^{2n}}{1^{2n/1}}(-1)^n e^{-2nsq} = 2\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{1^{2n/1}}(r\,e^{-sq})^{2n} \\
= 2\,\{Cos.\,(r\,e^{-sq}) - 1\}
\end{aligned}\right\}(ag)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_1^\infty {}_2A_{2n-1}e^{-(2n-1)sq} = \sum_1^\infty {}_1B_{2n-1}e^{-(2n-1)sq} = -2\sum_1^\infty \frac{r^{2n-1}}{1^{2n-1/1}}(-1)^n e^{-(2n-1)sq} = \\
&\qquad = -2\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{1^{2n-1/1}}(re^{-sq})^{2n-1} = 2\,Sin.(re^{-sq}) \\
&\sum_2^\infty {}_1A_{2n}e^{-2nsq} = -\sum_2^\infty {}_2B_{2n}e^{-2nsq} = 2\sum_2^\infty \frac{r^{2n}}{1^{2n/1}}(-1)^n e^{-2nsq} = 2\left\{\frac{1}{2}r^2e^{-2sq} + Cos.(re^{-sq}) - 1\right\} \\
&\sum_2^\infty {}_2A_{2n-1}e^{-(2n-1)sq} = \sum_2^\infty {}_1B_{2n-1}e^{-(2n-1)sq} = -2\sum_2^\infty \frac{r^{2n-1}}{1^{2n-1/1}}(-1)^n e^{-(2n-1)sq} = \\
&\qquad = 2\left\{Sin.(re^{-sq}) - re^{-sq}\right\}:
\end{aligned}\right\}(ag)$$

sauf les autres sommations naturellement, qui dépendent de a seulement et qui sont par conséquence tout-à-fait indépendantes de la forme des fonctions q_1 ou q_2. Eu égard à toutes les observations précédentes on tire en premier lieu des théorèmes (P) à (S) :

$$\int_0^\infty (e^{rSin.sx} + e^{-rSin.sx})\,Cos.(r\,Cos.sx)\frac{Cos.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\left[\binom{2a}{a} + 2\sum_1^a \binom{2a}{n+a}e^{-2nq} + (e^q+e^{-q})^{2a}\left\{Cos.(re^{-sq}) - 1\right\}\right], s \geqq 2a;. (300)$$

$$\int_0^\infty (e^{rSin.sx} + e^{-rSin.sx})\,Cos.(r\,Cos.sx)\frac{Cos.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left[2\sum_0^a \binom{2a+1}{n+a+1}e^{-(2n+1)q} + (e^q+e^{-q})^{2a+1}\left\{Cos.(re^{-sq}) - 1\right\}\right], s \geqq 2a+1;. (301)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty (e^{rSin.sx} + e^{-rSin.sx})\,Sin.(rCos.sx)\frac{Cos.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\left[0 + (e^q+e^{-q})^{2a}Sin.(re^{-sq})\right], s \geqq 2a; \\
&\int_0^\infty (e^{rSin.sx} + e^{-rSin.sx})\,Sin.(rCos.sx)\frac{Cos.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left[0 + (e^q+e^{-q})^{2a+1}Sin.(re^{-sq})\right], s \geqq 2a+1;
\end{aligned}\right\}.(302)$$

$$\int_0^\infty (e^{rSin.sx} - e^{-rSin.sx})\,Cos(rCos.sx)\frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a}\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,Sin.(re^{-sq}),\ s > 2a;\ . (303)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a}\pi\left[r\left\{(1-e^{-2q})^{2a} - 1\right\} + (e^q-e^{-q})^{2a}\left\{Sin.(re^{-sq}) - re^{-sq}\right\}\right] =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a}\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a}Sin.(re^{-sq}) - r\right],\ s = 2a;\ldots\ldots (304)$$

$$\int_0^\infty (e^{rSin.sx} - e^{-rSin.sx})\,Sin.(r\,Cos.sx)\frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{Cos.(re^{-sq}) - 1\right\},\ s > 2a;\ldots\ldots\ldots (305)$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\left[0 + (e^q-e^{-q})^{2a}\left\{\tfrac{1}{2}r^2e^{-2sq} + Cos.(re^{-sq}) - 1\right\}\right], s = 2a;. (306)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Sin. sx} + e^{-r Sin. sx}) \, Cos. (r \, Cos. sx) \frac{x \, Sin.^{2a+1} x \, dx}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} \pi \Big[e^{-(2a+1)q} \Big\{ (1 - e^{(2a+1)2q})(1 - e^{-2q})^{2a+1} - 2 \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big\} +$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a+1} \{ Cos. (r \, e^{-sq}) - 1 \} \Big], \; s > 2a+1; \; . \; (307)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} \pi \Big[e^{-(2a+1)q} \Big\{ (1 - e^{(2a+1)2q})(1 - e^{-2q})^{2a+1} - 2 \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big\} +$$

$$+ 0 + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \Big\{ \frac{1}{2} r^2 \, e^{-2sq} + Cos. (r e^{-sq}) - 1 \Big\} \Big], \; s = 2a+1; \; \ldots \ldots \; (308)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Sin. sx} + e^{-r Sin. sx}) \, Sin. (r \, Cos. s x) \frac{x \, Sin.^{2a+1} x \, dx}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} \, 2^{-2a-1} \, \pi \big[0 + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \, Sin. (r \, e^{-sq}) \big], \; s > 2a+1; \; \ldots \ldots \; (309)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} \pi \big[0 + r \{ (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1 \} + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \{ Sin. (r e^{-sq}) - r e^{-sq} \} \big] =$$

$$= (-1)^{a-1} \, 2^{-2a-1} \, \pi \big[-r + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \, Sin. (r \, e^{-sq}) \big], \; s = 2a+1; \; \ldots . \; (310)$$

Par les mêmes substitutions les théorèmes (T) à (Y) nous fournissent:

$$\int_0^\infty (e^{r Sin. sx} + e^{-r Sin. sx}) \, Cos. (r \, Cos. s \, x) \frac{Cos.^a x . Cos. p \, x \, dx}{q^2 + x^2} =$$

$$= 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a \big[2 \, e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq}) \{ Cos. (r \, e^{-sq}) - 1 \} \big], \; p \geqq a, s \geqq 2a; . \; (311)$$

$$= 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} \Big[2 \Big\{ (e^q + e^{-q})^a e^{-pq} - e^{(a-p)q} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} + e^{(p-a)q} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} \Big\} +$$

$$+ (e^q + e^{-q})^a (e^{pq} + e^{-pq}) \{ Cos. (r \, e^{-sq}) - 1 \} \Big], \; p < a, 2p \leqq s; \; \ldots \ldots \ldots \; (312)$$

où d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(a-p)$.

$$\int_0^\infty (e^{r Sin. sx} + e^{-r Sin. sx}) \, Sin. (r \, Cos. s \, x) \frac{Cos.^a x . Cos. p \, x \, dx}{q^2 + x^2} =$$

$$= 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a \big[0 + (e^{pq} + e^{-pq}) \, Sin. (r \, e^{-sq}) \big], \; p \geqq a, s \geqq 2a; \quad \ldots . \; (313)$$

$$= 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} \big[0 + (e^q + e^{-q})^a (e^{pq} + e^{-pq}) \, Sin. (r \, e^{-sq}) \big], \; p < a, 2p \leqq s;$$

$$\int_0^\infty (e^{r Sin. sx} - e^{-r Sin. sx}) \, Cos. (r \, Cos. s \, x) \frac{Cos.^a x . Sin. p \, x \, dx}{q^2 + x^2} =$$

$$= 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a (e^{pq} - e^{-pq}) \, Sin. (r \, e^{-sq}), \; p \leqq s - a; \; \ldots \ldots \ldots \; (314)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Sin.sx} - e^{-r Sin.sx})\, Sin.(r\, Cos.\, s\, x) \frac{Cos.^a x.\, Sin.\, p\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} =$$

$$= 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a (e^{-pq} - e^{pq}) \left\{ Cos.(r\, e^{-sq}) - 1 \right\},\quad p \leqq s - a; \quad \ldots\ldots (315)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Sin.sx} + e^{-r Sin.sx})\, Cos.(r\, Cos.\, s\, x) \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.\, p\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi (e^q - e^{-q})^{2a} \left[2 e^{-pq} + (e^{-pq} - e^{pq}) \left\{ Cos.(r e^{-sq}) - 1 \right\} \right], p > 2a, s > 4a;\ .(316)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \Big[2\, e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - 2\, e^{(2a-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} -$$
$$- 2\, e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \left\{ Cos.(r\, e^{-sq}) - 1 \right\} \Big],\quad p < 2a,\ 2p < s,\ p \text{ entier}; \ (317)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \Big[2\, e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - 2\, e^{(2a-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} -$$
$$- 2\, e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \left\{ Cos.(r e^{-sq}) - 1 \right\} \Big],\quad p < 2a, 2p < s,\ p \text{ fractionnaire}; \ \ldots\ldots (318)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \Big[0 + (e^q - e^{-q})^{2a} \Big\{ 2\, e^{-pq} + (e^{-pq} - e^{pq}) \Big[\frac{1}{2} r^2 e^{-2sq} +$$
$$+ Cos.(r\, e^{-sq}) - 1 \Big] \Big\} \Big],\quad p = s - 2a,\ 2p > s > 4a; \ \ldots (319)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \Big[2\, e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - 2\, e^{(2a-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - 2\, e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} +$$
$$+ 0 + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \left\{ \frac{1}{2} r^2 e^{-2sq} + Cos.(r e^{-sq}) - 1 \right\} \Big], p = s - 2a,\ 2p < s < 4a,\ p \text{ entier}; .(320)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \Big[2\, e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - 2\, e^{(2a-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - 2\, e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} +$$
$$+ 0 + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \left\{ \tfrac{1}{2} r^2 e^{-2sq} + Cos.(re^{-sq}) - 1 \right\} \Big], p = s - 2a, 2p < s < 4a, p \text{ fractionnaire}; .(321)$$

d est ici le plus grand nombre entier contenu dans $(a - \frac{1}{2} p)$.

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty (e^{r Sin.sx} + e^{-r Sin.sx})\, Sin.(r\, Cos.\, s\, x) \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.\, p\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} = \\ &= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi (e^q - e^{-q})^{2a} \left[0 + (e^{-pq} - e^{pq})\, Sin.(r\, e^{-sq}) \right],\ p > 2a, s > 4a; \\ &= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[0 + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) Sin.(re^{-sq}) \right], p < 2a, 2p < s, p \text{ arbitraire}; \end{aligned}\right\} .(322)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Sin.sx} + e^{-r Sin.sx})\, Sin.\,(r\, Cos.\, s\, x)\, \frac{x Sin.^{2a} x.\, Sin.\, p\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi \Big[-r\, \{(1 - e^{-2pq})(1 - e^{-2q})^{2a} - 1\} +$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a}\, \{0 + (e^{-pq} - e^{pq}) \big[Sin.\,(r\, e^{-sq}) - r\, e^{-sq}\big]\}\Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi\big[r + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) Sin.\,(r\, e^{-sq})\big],\ p = s - 2a,\ 2p > s > 4a; \quad (323)$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi \Big[0 - r\, \{(1 - e^{-2pq})(1 - e^{-2q})^{2a} - 1\} +$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a}\, (e^{-pq} - e^{pq})\, \big[Sin.\,(r\, e^{-sq}) - r\, e^{-sq}\big]\}\Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\, \pi \big[r + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) Sin.(r e^{-sq})\big],\ p = s - 2a,\ 2p < s < 4a,$$
p arbitraire ;

$$\int_0^\infty (e^{r Sin.sx} - e^{-r Sin.sx})\, Cos.\,(r\, Cos.\, s\, x)\, \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Cos.\, p\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, (e^q - e^{-q})^{2a}\, (e^{pq} + e^{-pq})\, Sin.\,(r\, e^{-sq}),\ p < s - 2\, a; \ldots\ldots (324)$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, \Big[r\, \{(1 + e^{-2pq})\, (1 - e^{-2q})^{2a} - 1\} +$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a}\, (e^{pq} + e^{-pq})\, \{Sin.\,(r\, e^{-sq}) - r\, e^{-sq}\}\Big] \quad . (325)$$

$$= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi \big[-r + (e^q - e^{-q})^{2a}\, (e^{pq} + e^{-pq})\, Sin.\,(r\, e^{-sq})\big],\ p = s - 2\, a;$$

$$\int_0^\infty (e^{r Sin.sx} - e^{-r Sin.sx})\, Sin.\,(r\, Cos.\, s\, x)\, \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Cos.\, p\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-1}\, \pi\, (e^q - e^{-q})^{2a}\, (e^{pq} + e^{-pq})\, \{Cos.\,(r\, e^{-sq}) - 1\},\ p < s - 2\, a;\ . (326)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi\big[0 - (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{pq} + e^{-pq}) \{\tfrac{1}{2} r^2 e^{-2sq} + Cos.(r e^{-sq}) - 1\}\big],\ p = s - 2a; . (327)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Sin.sx} + e^{-r Sin.sx})\, Cos.\,(r\, Cos.\, s\, x)\, \frac{x\, Sin.^{2a+1} x.\, Cos.\, p\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi (e^q - e^{-q})^{2a+1} \big[2 e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq}) \{Cos.(r e^{-sq}) - 1\}\big],\ p > 2a+1,\ s > 4a + 2; . (328)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[2 e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a+1} - 2 e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- 2 e^{(p-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} + (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \{Cos.(r e^{-sq}) - 1\}\Big]$$

$p < 2a + 1$, $2\, p < s$, p entier; . . (329)

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[2 e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a+1} - 2 e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- 2 e^{(p-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} + (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \{Cos.(r e^{-sq}) - 1\}\Big]$$

, $p < 2\, a + 1$; $2\, p < s$, p fractionnaire; . (330)

$$\int_0^\infty \left(e^{r\,Sin.sx}+e^{-r\,Sin.sx}\right) Cos.(r\,Cos.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[0+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{2\,e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\Big[\tfrac{1}{2}r^2\,e^{-2sq}+$$
$$+\,Cos.(r\,e^{-sq})-1\Big]\Big\}\Big],\quad p=s-2a-1,\ 2p>s>4a+2;\ \ldots\ldots\ldots\ (331)$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[2e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-2\,e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$
$$-\,2\,e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}+0+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\Big\{\tfrac{1}{2}r^2\,e^{-2sq}+$$
$$+\,Cos.(r\,e^{-sq})-1\Big\}\Big],\quad p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p\ \text{entier};\ \ldots\ldots\ (332)$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[2\,e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-2\,e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$
$$-\,2\,e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}+0+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\Big\{\tfrac{1}{2}r^2\,e^{-2sq}+$$
$$+\,Cos.(r\,e^{-sq})-1\Big\}\Big],\quad p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p\ \text{fractionnaire};\ \ldots\ (333)$$

dans ces intégrales d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a+1-p)$.

$$\int_0^\infty \left(e^{r\,Sin.sx}+e^{-r\,Sin.sx}\right) Sin.(r\,Cos.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$\left.\begin{aligned}
&=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big[0+(e^{pq}+e^{-pq})Sin.(r\,e^{-sq})\Big],\ p>2a+1,\ s>4a+2;\\
&=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[0+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})Sin.(re^{-sq})\Big],\ p<2a+1,\ 2p<s,\ p\ \text{arbitraire};
\end{aligned}\right\}\ (334)$$

$$\left.\begin{aligned}
&=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[r\left\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}+\\
&\qquad+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{0+(e^{pq}+e^{-pq})\Big[Sin.(r\,e^{-sq})-r\,e^{-sq}\Big]\right\}\Big]\\
&=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[-r+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})Sin.(re^{-sq})\Big],\ p=s-2a-1,\ 2p>s>4a+2;\\
&=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[0+r\left\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}+\\
&\qquad+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\left\{Sin.(r\,e^{-sq})-r\,e^{-sq}\right\}\Big]\\
&=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[-r+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})Sin.(re^{-sq})\Big],\ p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p\ \text{arbitraire};
\end{aligned}\right\}\ (335)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Sin.sx} - e^{-r Sin.sx}) \, Cos.(r\, Cos.sx) \frac{x\, Sin.^{2a+1} x. Sin.\, p\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) Sin.(r e^{-sq}), p < s - 2a - 1; \ . \ (336)$$

$$\left.\begin{aligned} &= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[r \left\{ (1 - e^{-2pq}) (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1 \right\} + \\ &\qquad + (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) \left\{ Sin.(r e^{-sq}) - r e^{-sq} \right\} \Big] \\ &= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[-r + (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) Sin.(r e^{-sq}) \Big], p = s - 2a - 1; \end{aligned}\right\} . (337)$$

$$\int_0^\infty (e^{r Sin.sx} - e^{-r Sin.sx}) \, Sin.(r\, Cos.sx) \frac{x\, Sin.^{2a+1} x. Sin.\, p\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) \left\{ Cos.(r e^{-sq}) - 1 \right\}, p < s - 2a - 1; . (338$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[0 - (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) \left\{ \tfrac{1}{2} r^2 e^{-2sq} + \right.$$

$$\left. + Cos.(r e^{-sq}) - 1 \right\} \Big], \ p = s - 2a - 1; \ . \ . \ (339)$$

On a ici partout $r^2 < \infty$, de sorte que r est absolument arbitraire. Ainsi auprès de ces intégrales le cas se présente souvent que la différence s'évanouit entre les valeurs qui éxistent pour les différentes rélations mutuelles entre les éléments p, s et a: on ne garde dans ces cas que les conditions qui étaient communes aux divers cas coincidents. Ensuite la formule (302) nous indique qu'ici encore il n'y a plus lieu de distinguer entre un a pair et un a impair; mais c'est aussi la seule formule qui jouit de cette généralité. Ici tout comme au paragraphe précédent, le facteur $e^{r Sin.sx} - e^{-r Sin.sx}$ est la $Sinhp.\,(r Sin.sx)$.

21. Supposons encore

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (1 + 2r\, Cos.sx + r^2)^{\frac{1}{2}b} Cos. \left\{ b\, Arctang. \frac{r\, Sin.\, s\, x}{1 + r\, Cos.\, s\, x} \right\} = \sum_0^\infty \binom{b}{n} r^n Cos.nsx \\ \varphi_2(x) &= (1 + 2r\, Cos.sx + r^2)^{\frac{1}{2}b} Sin. \left\{ b\, Arctang. \frac{r\, Sin.\, s\, x}{1 + r\, Cos.\, s\, x} \right\} = \sum_1^\infty \binom{b}{n} r^n Sin.nsx \end{aligned}\right\}, r^2 < 1; . (ah.$$

En comparant ces sommations à celles qui se présentent dans les équations générales (a), on en conclut qu'il faut prendre

$$A_0 = 1 \ , \ A_n = \binom{b}{n} r^n \ , \ B_n = \binom{b}{n} r^n \ .$$

En outre il se présente seulement les sommations suivantes dans l'application des formules précédentes:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty \mathrm{A}_n e^{-nsq} = \sum_1^\infty \mathrm{B}_n e^{-nsq} = \sum_1^\infty \binom{b}{n} r^n e^{-nsq} = \sum_1^\infty \binom{b}{n} (r e^{-qs})^n = (1 + r e^{-qs})^b - 1\\ &\sum_2^\infty \mathrm{A}_n e^{-nsq} = \sum_2^\infty \mathrm{B}_n e^{-nsq} = \sum_2^\infty \binom{b}{n} r^n e^{-nsq} = (1 + r e^{-qs})^b - 1 - b r e^{-qs}\end{aligned}\right\} . (ai)$$

Des théorèmes (P) à (S) on déduit en conséquence:

$$\int_0^\infty (1 + 2 r \, Cos. s x + r^2)^{\frac{1}{2}b} \, Cos. \left\{ b \, Arctang. \frac{r \, Sin. s x}{1 + r \, Cos. s x} \right\} \frac{Cos.^{2a} x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} \left[\binom{2a}{a} + 2 \sum_1^a \binom{2a}{n+a} e^{-2nq} + (e^q + e^{-q})^{2a} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} \right], \; s \geqq 2a ; . (340)$$

$$\int_0^\infty (1 + 2 r \, Cos. s x + r^2)^{\frac{1}{2}b} \, Cos. \left\{ b \, Arctang. \frac{r \, Sin. s x}{1 + r \, Cos. s x} \right\} \frac{Cos.^{2a+1} x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \left[2 \sum_0^a \binom{2a+1}{n+a+1} e^{-(2n+1)q} + (e^q + e^{-q})^{2a+1} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} \right], \; s \geqq 2a + 1 ; (341)$$

$$\int_0^\infty (1 + 2 r \, Cos. s x + r^2)^{\frac{1}{2}b} \, Sin. \; b \, Arctang. \frac{r \, Sin. s x}{1 + r \, Cos. s x} \Big\} \frac{x \, Sin.^{2a} x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi (e^q - e^{-q})^{2a} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} , \; s > 2a ; \; \ldots\ldots\ldots (342)$$

$$\left.\begin{aligned}&= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[b r \{ (1 - e^{-2q})^{2a} - 1 \} + (e^q - e^{-q})^{2a} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 - b r e^{-qs} \} \right]\\ &= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[- b r + (e^q - e^{-q})^{2a} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} \right]\end{aligned}\right\}, s = 2a ; . (343)$$

$$\int_0^\infty (1 + 2 r \, Cos. s x + r^2)^{\frac{1}{2}b} \, Cos. \left\{ b \, Arctang. \frac{r \, Sin. s x}{1 + r \, Cos. s x} \right\} \frac{x \, Sin.^{2a+1} x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \left[e^{-(2a+1)q} \left\{ (1 - e^{(2a+1)2q}) (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 2 \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \right\} + \right.$$

$$\left. + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} \right], \; s > 2a + 1 ; \; . \; . \; (344)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \left[e^{-(2a+1)q} \left\{ (1 - e^{(2a+1)2q}) (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 2 \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \right\} + \right.$$

$$\left. + b r \{ (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1 \} + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 - b r e^{-qs} \} \right]$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \left[e^{-(2a+1)q} \left\{ (1 - e^{(2a+1)2q}) (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 2 \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \right\} - \right.$$

$$\left. - b r + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} \right], \; s = 2a + 1 ; \ldots\ldots\ldots (345)$$

et tout de même des théorèmes (T) à (Y):

$$\int_0^\infty (1+2\,r\,Cos.\,s\,x+r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Cos.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\right\}\frac{Cos.^a x.\,Cos.\,p\,x}{q^2+x^2}\,d\,x =$$

$$= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\left[e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\{(1+r\,e^{-qs})^b-1\}\right]$$

$$= 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\left[(e^{-pq}-e^{pq})+(e^{pq}+e^{-pq})(1+r\,e^{-qs})^b\right],\ p \geqq a,\ s \geqq 2\,a;\ .\ (346)$$

$$= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}\left[(e^q+e^{-q})^a e^{-pq}-e^{(a-p)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+e^{(p-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}+\right.$$

$$\left.+\ (e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\{(1+r\,e^{-qs})^b-1\}\right],\ p<a,\ 2\,p \leqq s;\ \ldots\ldots\ (347)$$

où d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}\,(a-p)$.

$$\int_0^\infty (1+2\,r\,Cos\,s\,x+r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Sin.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\right\}\frac{Cos.^a x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1}{2}\{(1+r\,e^{-qs})^b-1\}\ ,\ p \leqq s-a;\ \ldots\ldots\ (348)$$

$$\int_0^\infty (1+2\,r\,Cos.\,s\,x+r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Cos.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a} x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\left[e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\{(1+r\,e^{-qs})^b-1\}\right]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\left[(e^{-pq}+e^{pq})+(e^{-pq}-e^{pq})(1+re^{-qs})^b\right], p>2a, s>4a;.\ (349)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2\,a}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2\,a}{n}e^{2nq}+\right.$$

$$\left.+\ (e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\{(1+r\,e^{-qs})^b-1\}\right],\ p<2\,a,\ 2\,p<s,\ p\ \text{entier};\ \ldots\ldots\ (350)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2\,a}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2\,a}{n}e^{2nq}+\right.$$

$$\left.+\ (e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\{(1+r\,e^{-qs})^b-1\}\right],\ p<2\,a,\ 2\,p<s,\ p\ \text{fractionnaire};\ \ .\ .\ (351)$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\left[-\frac{1}{2}b\,r\,\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+\right.$$

$$\left.+\ (e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\left[(1+r\,e^{-qs})^b-1-b\,r\,e^{-qs}\right]\right\}\right],\ p=s-2\,a,$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\left[b\,r+(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{(e^{-pq}+e^{pq})+(e^{-pq}-e^{pq})(1+r\,e^{-qs})^b\right\}\right]\ \ 2\,p>s>4\,a;\ \ldots\ (352)$$

$$\int_0^\infty (1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Cos.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,sx}{1+r\,Cos.\,sx}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[br-2e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-2e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{(e^{-pq}+e^{pq})+(e^{-pq}-e^{pq})(1+re^{-qs})^b\right\}\Big],\ p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p\text{ entier};\ \ldots\ldots\ (353)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[br-2e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-2e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{(e^{-pq}+e^{pq})+(e^{-pq}-e^{pq})(1+re^{-qs})^b\right\}\Big],\ p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p\text{ fractionnaire};\ \ldots\ (354)$$

Ici d est le plus grand nombre entier contenu dans $(a-\frac{1}{2}p)$.

$$\int_0^\infty (1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Sin.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,sx}{1+r\,Cos.\,sx}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\left\{(1+re^{-qs})^b-1\right\},\ p<s-2a;\ .\ (355)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[\frac{1}{2}br\left\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\}+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\left\{(1+re^{-qs})^b-1-bre^{-qs}\right\}\Big]$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[-br+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\left\{(1+re^{-qs})^b-1\right\}\Big],\ p=s-2a;\ .\ (356)$$

$$\int_0^\infty (1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Cos.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,sx}{1+r\,Cos.\,sx}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big[e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\left\{(1+re^{-qs})^b-1\right\}\Big]$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big[(e^{-pq}-e^{pq})+(e^{pq}+e^{-pq})(1+re^{-qs})^b\Big],\ p>2a+1,\ s>4a+2;\ .\ (357)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$

$$-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\left\{(1+re^{-qs})^b-1\right\}\Big],\ p<2a+1,\ 2p<s,\ p\text{ entier};\ \ldots\ (358)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$

$$-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\left\{(1+re^{-qs})^b-1\right\}\Big],\ p<2a+1,\ 2p<s,\ p\text{ fractionnaire};\ \ldots\ldots\ (359)$$

$$\int_0^\infty (1 + 2\,r\,Cos.\,s\,x + r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Cos.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1 + r\,Cos.\,s\,x}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\left[\tfrac{1}{2}b\,r\left\{(1 + e^{-2pq})(1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1\right\} + \right.$$
$$\left. + (e^q - e^{-q})^{2a+1}\left\{e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq})\tfrac{1}{2}\left[(1 + r\,e^{-qs})^b - 1 - b\,r\,e^{-qs}\right]\right\}\right]$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\left[-b\,r + (e^q - e^{-q})^{2a+1}\left\{(e^{-pq} - e^{pq}) + (e^{pq} + e^{-pq})(1 + r\,e^{-qs})^b\right\}\right], \begin{array}{l} p = s - 2\,a - 1, \\ 2p > s > 4a + 2. \end{array} \quad \ldots\ldots (360)$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\left[-br - 2e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} - 2e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq} + \right.$$
$$\left. + (e^q - e^{-q})^{2a+1}\left\{(e^{-pq} - e^{pq}) + (e^{pq} + e^{-pq})(1 + r\,e^{-qs})^b\right\}\right], \begin{array}{l} p = s - 2\,a - 1,\ 2p < s < 4a + 2, \\ p \text{ entier}; \ldots\ldots\ldots\ldots (361) \end{array}$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\left[-br - 2e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} - 2e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq} + \right.$$
$$\left. + (e^q - e^{-q})^{2a+1}\left\{(e^{-pq} - e^{pq}) + (e^{pq} + e^{-pq})(1 + re^{-qs})^b\right\}\right], \begin{array}{l} p = s - 2\,a - 1,\ 2p < s < 4a + 2 \\ p \text{ fractionnaire}; \ldots\ldots\ldots (362) \end{array}$$

Ici d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a + 1 - p)$.

$$\int_0^\infty (1 + 2\,r\,Cos.\,s\,x + r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Sin.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1 + r\,Cos.\,s\,x}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\pi(e^q - e^{-q})^{2a+1}(e^{pq} - e^{-pq})\left\{(1 + re^{-qs})^b - 1\right\}, p < s - 2a - 1\,; . (363)$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\left[\frac{1}{2}b\,r\left\{(1 - e^{-2pq})(1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1\right\} + \right.$$
$$\left. + (e^q - e^{-q})^{2a+1}(e^{pq} - e^{-pq})\frac{1}{2}\left\{(1 + r\,e^{-qs})^b - 1 - b\,r\,e^{-qs}\right\}\right]$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\left[-br + (e^q - e^{-q})^{2a+1}(e^{pq} - e^{-pq})\left\{(1 + re^{-qs})^b - 1\right\}\right], p = s - 2a - 1; \ldots\ldots (364)$$

Lorsqu'à présent on compare les intégrales (546), (547) avec la formule (548), les intégrales (549), (550), (551) avec la formule (555), les intégrales (552), (553), (554) avec la formule (556), les intégrales (557), (558), (559) avec la formule (563), et les intégrales (560), (561), (562) avec la formule (564), il est évident, que les fonctions sous le signe d'intégration ne diffèrent que dans les deux facteurs, qui sont respectivement une *Sinus* ou une *Cosinus* des deux formes:

$$b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1 + r\,Cos.\,s\,x} \text{ et } p\,x\,.$$

La combination de ces intégrales correspondantes par voie d'addition et de

soustraction en produit de nouvelles, qui auront respectivement sous le signe d'intégration la *Sinus* ou la *Cosinus* de cette autre forme:

$$p\,x \pm b\, Arctang.\frac{r\, Sin.\, s\,x}{1 + r\, Cos.\, s\,x} = \varphi\,.$$

Mais celle-ci peut être réduite de la manière suivante. Prenons p, qui est tout-à-fait arbitraire, égal à bt, où t reste arbitraire de même; de telle manière nous pourrons représenter la somme mentionnée par un *Arctang.*: car

$$\varphi = b\,t\,x \pm b\, Arctang.\frac{r\, Sin.\, s\,x}{1 + r\, Cos.\, s\,x} = b\left[Arctang.(Tang.\, t\,x) \pm Arctang.\frac{r\, Sin.\, s\,x}{1 + r\, Cos.\, s\,x}\right] =$$

$$= b\, Arctang.\left\{\frac{Tang.\, t\,x \pm \dfrac{r\, Sin.\, s\,x}{1 + r\, Cos.\, s\,x}}{1 \mp Tang.\, t\,x\dfrac{r\, Sin.\, s\,x}{1 + r\, Cos.\, s\,x}}\right\}$$

$$= b\, Arctang.\left(\frac{Sin.tx(1 + rCos.sx) \pm rSin.sx.Cos.tx}{Cos.tx(1 + rCos.sx) \mp rSin.sx.Sin.tx}\right) = b\, Arctang.\left(\frac{Sin.tx + rSin.\{(t \pm s)x\}}{Cos.tx + rCos.\{(t \pm s)x\}}\right).(ak)$$

Puisque t est arbitraire, nous rendrons cette forme encore plus symmétrique, en posant $u \mp \frac{1}{2} s$ au lieu de t, car alors $t \pm s$ acquiert la valeur $u \pm \frac{1}{2} s$ et u reste tout aussi arbitraire, que l'étaient auparavant t et p. Ainsi la valeur de φ devient:

$$\varphi = b\, Arctang.\left(\frac{Sin.\,\{(u \mp \frac{1}{2} s)x\} + r\, Sin.\,\{(u \pm \frac{1}{2} s)\,x\}}{Cos.\,\{(u \mp \frac{1}{2} s)\,x\} + r\, Cos.\,\{(u \pm \frac{1}{2} s)\,x\}}\right) \;\ldots\ldots\ldots\; (al)$$

Lorsqu'encore on développe les *Sinus* et les *Cosinus*, tant dans le numérateur que dans le dénominateur de cette fraction, et que l'on réunit les termes, qui sont homogènes à l'égard de l'élément r, on obtient par la division commune avec $Cos.\, ux.\ Cos.\frac{1}{2}sx$, une autre valeur de φ:

$$\varphi = b\, Arctang.\frac{(1 + r)\, Tang.\, u\,x \mp (1 - r)\, Tang.\frac{1}{2}\, s\,x}{(1 + r) \mp (1 - r)\, Tang.\, u\,x.\ Tang.\frac{1}{2}\, sx} \;\ldots\ldots\ldots\; (am)$$

Quelle valeur de l'arc φ, que l'on veuille choisir, il sera toujours aisé d'obtenir à l'aide des intégrales mentionnées les valeurs des intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty (1 + 2\,r\, Cos.\, s\,x + r^2)^{\frac{1}{2}b}\, Cos.\,\varphi\,\frac{Cos.^a\, x\, d\,x}{q^2 + x^2}\,,\ \int_0^\infty (1 + 2\,r\, Cos.\, s\,x + r^2)^{\frac{1}{2}b}\, Sin.\,\varphi\,\frac{x\, Sin.^{2a}\, x\, d\,x}{q^2 + x^2}\,,$$

$$\int_0^\infty (1 + 2\,r\, Cos.\, s\,x + r^2)^{\frac{1}{2}b}\, Cos.\,\varphi\,\frac{x\, Sin.^{2a+1}\, x\, d\,x}{q^2 + x^2}\,.$$

Encore il faut observer, qu'il est permis de prendre b négatif. Dans ce cas-là le facteur $(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{\frac{1}{2}b}$ sous le signe d'intégration se change en $(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{-\frac{1}{2}b}$: tandis que la *Cosinus* de l'arc $b\ Arctang.\frac{r\,Sin.\,sx}{1+r\,Cos.\,sx}$, qui devient négatif en conséquent, ne change pas de valeur et que la *Sinus* du même arc devient négative. En prenant dans le premier cas, où les intégrales contiennent une *Cosinus* de l'arc mentionné, la différence des deux intégrales correspondantes à b et $-b$ respectivement, tandis qu'il en faut prendre la somme, quand c'est la *Sinus* de cet arc, qui entre sous le signe d'intégration, — alors dans la valeur des nouvelles intégrales toutes les sommations s'annullent, parce qu'elles ne dépendent que de la quantité d, c'est-à-dire en dernière analyse de l'élément a, et qu'ainsi elles sont parfaitement indépendantes de b. Non-seulement alors les expressions deviennent plus simples, mais encore il se présente ici le phénomène déjà observé antérieurement, que les divers cas spéciaux, qui auparavant étaient à distinguer entre eux, viennent à coincider.

Sous le signe d'intégration on obtiendra le facteur:

$(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{\frac{1}{2}b}\pm(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{-\frac{1}{2}b}$ au lieu de $(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{\frac{1}{2}b}$,

et dans la valeur de l'intégrale la fonction

$$(1+re^{-qs})^b-(1+re^{-qs})^{-b} \text{ au lieu de } (1+re^{-qs})^b-1.$$

De plus on a partout ici la condition, que la valeur numérique de r doit rester au dessous de l'unité. On pourrait changer cette condition dans l'autre, que r^2 reste toujours plus grande que l'unité, par la supposition de r égal à $\frac{1}{r}$: mais alors les fonctions sous le signe d'intégration changeraient de forme.

22. Enfin les résultats ne manqueront pas d'importance, que l'on acquiert en supposant dans les formules générales (P) à (Y):

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x) &= l(1+2r\,Cos.\,sx+r^2) = -2\sum_1^\infty\frac{(-r)^n}{n}\,Cos.\,nsx\\ \varphi_2(x) &= Arctang.\left(\frac{r\,Sin.\,sx}{1+r\,Cos.\,sx}\right) = -\sum_1^\infty\frac{(-r)^n}{n}\,Sin.\,nsx\end{aligned}\right\},\ r^2 \leqq 1;\ldots\ldots\ldots\ (an)$$

En premier lieu substituons $\varphi_1(x)$ dans les théorèmes (P), (Q), (S), (T), (V) et (X), et nous aurons ici $A_0=0$, $A_n=-2\frac{(-r)^n}{n}$; donc puisque

$$\left.\begin{array}{l}\sum_1^\infty A_n e^{-nqs} = \sum_1^\infty -2\frac{(-r)^n}{n} e^{-nqs} = -2\sum_1^\infty \frac{(-re^{-qs})^n}{n} = 2\,l(1+re^{-qs}) \\ \sum_2^\infty A_n e^{-nqs} = -2\left\{re^{-qs} + \sum_1^\infty \frac{(-re^{-qs})^n}{n}\right\} = -2\left\{re^{-qs} - l(1+re^{-qs})\right\}\end{array}\right\} \ldots (ac)$$

les théorèmes mentionnés nous donnent:

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty l(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{Cos.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a}\,l(1+re^{-qs}),\ s \geqq 2a; \\ \int_0^\infty l(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{Cos.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a+1}l(1+re^{-qs}),\ s \geqq 2a+1;\end{array}\right\} .(365)$$

$$\int_0^\infty l(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}l(1+re^{-qs}),\ s>2a+1; \ldots (366)$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\left[r\left\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{-re^{-qs}+l(1+re^{-qs})\right\}\right]$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\left[r+(e^q-e^{-q})^{2a+1}l(1+re^{-qs})\right],\ s=2a+1; \ldots (367)$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty l(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{Cos.^a x.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2} = \\ \qquad = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\,l(1+re^{-qs}),\ p \geqq a,\ s \geqq 2a; \\ \qquad = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\,l(1+re^{-qs}),\ p<a,\ 2p \leqq s;\end{array}\right\} .(368)$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty l(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2} = \\ = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,l(1+re^{-qs}),\ p>2a,\ s>4a; \\ = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,l(1+re^{-qs}),\ p<2a,\ 2p<s,\ p\ \text{arbitraire};\end{array}\right\} .(369)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[-r\left\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\}+\right. \\ \qquad \left.+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,l(1+re^{-qs})-re^{-qs}\right] \\ = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[r+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,l(1+re^{-qs})\right]\end{array}\right\} ,\ p=s-2a,\ 2p>s>4a; \\ = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[r+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,l(1+re^{-sq})\right],\ p=s-2a,\ 2p<s<4a;\ p\ \text{arbitraire};\end{array}\right\} .(370)$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty l(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2} = \\ = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\,l(1+re^{-qs}),\ p>2a+1,\ s>4a+2; \\ = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\,l(1+re^{-qs}),\ p<2a+1,\ 2p<s,\ p\ \text{arbitraire};\end{array}\right\} .(371)$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty l(1+2r\,Cos.\,s\,x+r^2)\dfrac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}= \\ \left.\begin{array}{l}=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\left[r\left\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}+\right. \\ \quad\left.+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\left\{-r\,e^{-qs}+l(1+r\,e^{-qs})\right\}\right] \\ =(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[-r+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})l(1+re^{-qs})\right\}\Big]\end{array}\right\}\begin{array}{l},p=s-2a-1, \\ 2p>s>4a+2;\end{array} \\ =(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[-r+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})l(1+re^{-qs})\right]\begin{array}{l},p=s-2a-1, \\ 2p<s<4a+2, \\ p \text{ arbitraire};\end{array}\end{array}\right\}.(372)$$

D'après les équations (an) ces intégrales jouissent des valeurs trouvées autant que r reste entre les limites de l'unité négative et de l'unité positive, de sorte que r peut devenir négatif; dans ce cas le facteur logarithmique $l(1+2r\,Cos.\,s\,x+r^2)$ sous le signe d'intégration devient ici $l(1-2r\,Cos.\,s\,x+r^2)$. Si l'on prend la somme de deux intégrales correspondantes, on trouve sous le signe d'intégration le facteur:

$$l(1+2rCos.sx+r^2)+l(1-2rCos.sx+r^2)=l\{(1+r^2)^2-4r^2Cos.^2sx\}=l\{1-2r^2Cos.2sx+r^4\};$$

de sorte que l'intégrale ainsi déduite ne diffère de la précédente qu'en ce qu'on a r^2 et $2s$ au lieu de r et de s, et ne donne rien de nouveau. Au contraire la différence des deux intégrales nous fournit de nouveaux résultats, et l'on aura ainsi:

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty l\dfrac{1+2r\,Cos.\,s\,x+r^2}{1-2r\,Cos.\,s\,x+r^2}\,\dfrac{Cos.^{2a}x\,d\,x}{q^2+x^2}=2^{-2a}\dfrac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a}\,l\dfrac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}},\ s\geqq 2a; \\ \int_0^\infty l\dfrac{1+2rCos.sx+r^2}{1-2rCos.sx+r^2}\,\dfrac{Cos.^{2a+1}xdx}{q^2+x^2}=2^{-2a-1}\dfrac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a+1}\,l\dfrac{1+re^{-qs}}{1-re^{-qs}},\ s\geqq 2a+1;\end{array}\right\}.(373)$$

$$\int_0^\infty l\dfrac{1+2rCos.sx+r^2}{1-2rCos.sx+r^2}\,\dfrac{xSin.^{2a+1}xdx}{q^2+x^2}=(-1)^a2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}l\dfrac{1-re^{-qs}}{1+re^{-qs}},s>2a+1;.(374)$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\left[-2r+(e^q-e^{-q})^{2a+1}l\dfrac{1-r\,e^{-qs}}{1+r\,e^{-qs}}\right],\ s=2a+1;.(375)$$

$$\int_0^\infty l\dfrac{1+2rCos.sx+r^2}{1-2rCos.sx+r^2}\,\dfrac{Cos.^ax.Cos.pxdx}{q^2+x^2}=2^{-a-1}\dfrac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\,l\dfrac{1+re^{-qs}}{1-re^{-qs}}\,\begin{array}{l},\ p\geqq a, s\geqq 2a, \\ \text{ou } p<a, 2p\leqq s;\end{array}\Big\}.(376)$$

$$\int_0^\infty l\dfrac{1+2r\,Cos.\,s\,x+r^2}{1-2r\,Cos.\,s\,x+r^2}\,\dfrac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-1}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{-pq}-e^{pq})\,l\dfrac{1-re^{-qs}}{1+re^{-qs}},\ p>2a, s>4a, \text{ou } p<2a, 2p<s;.(377)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\left[-2r+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})l\dfrac{1-re^{-qs}}{1+re^{-qs}}\right]\begin{array}{l},p=s-2a \text{ et } 2p>s>4a, \\ \text{ou } 2p<s<4a;\end{array}\Big\}.(37$$

$$\int_0^\infty l\frac{1+2r\,Cos.sx+r^2}{1-2r\,Cos.sx+r^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.px\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a-1}(e^{pq}+e^{-pq})\,l\frac{1-re^{-qs}}{1+re^{-qs}},\ p>2a+1, s<4a+2, \text{ ou } p<2a+1, 2p<s;\ .(379)$$

$$(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\left[2r+(e^q-e^{-q})^{2a-1}(e^{pq}+e^{-pq})\,l\frac{1-re^{-qs}}{1+re^{-qs}}\right], p=s-2a-1 \text{ et } 2p>s>4a+2, \text{ ou } 2p<s<4a+2;\ .\ .\ .\ (380)$$

Dans cette réduction de nouveau, il y a plusieurs des cas spéciaux, qui coincident et dont la différence disparait: mais cela a lieu ici d'une autre manière qu'auparavant. De plus les intégrales (565) et (575) valent tant pour des a pairs que pour des a impairs. Partout ici la valeur numérique de r doit rester au dessous de l'unité, mais on peut aisément déduire les valeurs de ces intégrales pour le cas contraire, où r^2 soit plus grand que l'unité: on posera pour cela $r=\frac{1}{r'}$. Les formules (575) à (580) donneront immédiatement les valeurs requises, sans que la forme de la fonction intégrée change aucunement. Il n'en est pas ainsi des intégrales précédentes; mais puisque

$$l(1+2r\,Cos.sx+r^2) = l\,r^2 + l\left(1+\frac{2}{r}Cos.sx+\frac{1}{r^2}\right),$$

on n'aura qu'à soustraire de leurs valeurs respectives le produit de $2\,lr$ par la valeur des intégrales (21), (22), (pour $a+1$ au lieu de a) (154), (23) et (24), (157) à (159) et (160) à (162) pour acquérir des intégrales de forme identique aux intégrales (565) à (572).

25. Il nous reste encore à introduire la supposition $q_2(x)$ des équations (an) dans les théorèmes (R), (U), (W) et (Y). Alors B_n devient $-\frac{(-r)^n}{n}$, et par conséquent:

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^\infty B_n e^{-nqs} &= \sum_1^\infty -(-r)^n e^{-nqs} = -\sum_1^\infty \frac{(-re^{-qs})^n}{n} = l(1+re^{-qs}),\\ \sum_2^\infty B_n e^{-nqs} &= -re^{-qs}+\sum_1^\infty B_n e^{-nqs} = l(1+re^{-qs})-re^{-qs}\ .\ .\ .\ .\end{aligned}\right\}(ap)$$

A l'aide de ces deux réductions les formules mentionnées nous donnent:

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{r\,Sin.sx}{1+r\,Cos.sx}\,\frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}l\,(1+re^{-qs}), s>2a;\ .(381)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[r\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a}\{l(1+re^{-qs})-re^{-qs}\}\right] =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\,l(1+re^{-qs})-r\right], s=2a;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (382)$$

$$\int_0^\infty Arctg.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,sx}\,\frac{Cos.^a x.\,Sin.\,pxdx}{q^2+x^2}=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})l(1+re^{-qs}),\ p\leqq s-a;\ \ldots (383)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\,\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\,l(1+r\,e^{-qs})\ ,\ p<s-2\,a;\ \ldots\ (384)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[r\big\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\big\}+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\big\{l(1+re^{-qs})-re^{-qs}\big\}\Big]=$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\,\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\,l(1+r\,e^{-qs})-r\Big]\ ,\ p=s-2\,a;\ \ldots\ (385)$$

$$\int^\infty Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\,l(1+r\,e^{-qs})\ ,\ p<s-2\,a-1;\ \ldots\ (386)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\Big[r\big\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\big\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\big\{l(1+re^{-qs})-re^{-qs}\big\}\Big]=$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\,\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\,l(1+r\,e^{-qs})-r\Big]\ ,\ p=s-2\,a-1;\ .\ (387)$$

Quoique dans ces formules il n'y a plus de sommations, on peut pourtant, tout comme au numéro précédent, combiner ces intégrales par voie d'addition et de soustraction avec les intégrales correspondantes, que l'on obtient en rendant r négatif: ce qui est permis, puisque r est compris entre -1 et $+1$. De telle sorte on obtiendra des résultats très-simples, lorsqu'on se sert des transformations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&Arctg.\left(\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,sx}\right)+Arctg.\left(\frac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,sx}\right)=Arctg.\frac{\dfrac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,sx}+\dfrac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,sx}}{1-\dfrac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,sx}\cdot\dfrac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,sx}}=Arctg.\frac{-r^2\,Sin.\,2sx}{1-r^2\,Cos.\,2sx}\\
&Arctg.\left(\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,sx}\right)-Arctg.\left(\frac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,sx}\right)=Arctg.\frac{\dfrac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,sx}-\dfrac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,sx}}{1+\dfrac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,sx}\cdot\dfrac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,sx}}=Arctg.\frac{2\,r\,Sin.\,s\,x}{1-r^2}
\end{aligned}\right\}.(aq)$$

On pourra appliquer la seconde de ces formules à toutes les intégrales (381) à (387), mais l'application de la première auprès des intégrales (381), (383), (384), (386) ne nous fournira rien de nouveau, tandis qu'au contraire son usage auprès des intégrales (382), (385) et (387) nous donnera bien des nouveaux résultats, où l'on peut prendre s au lieu de $2s$. Alors il vient:

$$\int_0^\infty Arctg.\frac{r^2\,Sin.\,s\,x}{1-r^2\,Cos.\,sx}\,\frac{x\,Sin.^{2a}xdx}{q^2+x^2}=(-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}l(1-r^2e^{-qs}),\ s=a;\ .(388)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{r^2\,Sin.s\,x}{1-r^2\,Cos.s\,x}\,\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,l\,(1-r^2\,e^{-qs})\;,\;p=\tfrac{1}{2}\,s-2\,a;\;.\;(389)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{r^2\,Sin.\,s\,x}{1-r^2\,Cos.\,s\,x}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}\,x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-3}\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}-e^{-pq})\,l(1-r^2\,e^{-qs})\,,p=\tfrac{1}{2}\,s-2\,a-1;\;.\;.\;(390)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{2\,r\,Sin.\,s\,x}{1-r^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a}x\,d\,x}{q^2+x^2}=(-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,l\,\frac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}}\,,\,s>2\,a;\,.\,(391)$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\,l\,\frac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}}-2\,r\right],\,s=2\,a;\;.\;(392)$$

$$\int_0^\infty Arctg.\frac{2rSin.sx}{1-r^2}\,\frac{Cos.^axSin.pxdx}{q^2+x^2}=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})\,l\,\frac{1+re^{-qs}}{1-re^{-qs}}\,,p\leq s-a;\,.(393)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{2\,r\,Sin.\,s\,x}{1-r^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a}\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,l\,\frac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}}\;,\;p<s-2\,a;\;.\;(394)$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,l\,\frac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}}-2\,r\right],p=s-2\,a;\;.\;(395)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{2\,r\,Sin.\,s\,x}{1-r^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}\,x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}-e^{-pq})\,l\,\frac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}}\,,p<s-2\,a-1;\,.(396)$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}-e^{-pq})\,l\,\frac{1+re^{-qs}}{1-re^{-qs}}-2\,r\right],p=s-2\,a-1;\,.\,(397)$$

Dans toutes ces formules la valeur numérique de r est assujettie à rester au-dessous de l'unité. Lorsqu'on prend $\frac{1}{r'}$ au lieu de r, la valeur numérique de r' reste toujours au-dessus de l'unité: dans ce cas les quatre dernières intégrales (391) à (397) ne changent pas quant à la fonction sous le signe d'intégration, ce qui arrive bien auprès des trois premières (388) à (390).

24. Toutes les intégrales déduites ici sont nouvelles, autant que je sache, et elles sont des exemples frappants de l'influence qu'une valeur spéciale d'une constante sous le signe d'intégration peut avoir sur la valeur de l'intégrale

elle-même; elles montrent d'ailleurs comment cette influence peut être différente auprès d'intégrales, dont la forme a d'une autre part une grande analogie.

Elles démontrent donc la nécessité des cas spéciaux, que nous avons admis auprès des théorèmes dans la partie première et troisième: ces théorèmes eux-mêmes ne sont peut-être pas seulement nouveaux en ce qu'ils s'occupent en particulier de chaque cas spécial.

Partout ici a désigne un nombre entier, $p, q, r, s, t,$ au contraire, désignent des quantités positives en général, mais tout-à-fait arbitraires, tant au moins qu'ils ne sont pas liés quelquefois entre eux par des équations de condition.

Parmi les résultats obtenus il y a 210 sans aucune sommation, et 187 qui contiennent une sommation, mais de telle nature qu'elle peut être très-aisément évaluée pour chaque valeur spéciale de d ou de a. En effet ce sont des sommations, qui consistent d'un nombre de termes fini: seulement elles ne pouvaient être réduites à des formes fermées.

CORRECTIONS.

Page.	*Ligne.*	*au lieu de:*	*lisez:*
24	14	e^{+2aq}	e^{-2aq}
44	11	$\Big[$	$\Big[-$
51	6, 8	e^{-pq}	e^{pq}
	21	$e^{-(2a+1)q}$	$e^{(2a+1)q}$
54	3, 5	$e^{(r-2a-1)q}$	$e^{-(r-2a-1)q}$
	20	$\{e^{-pq}$	$\{e^{pq}$
68	8	$(1+e^{-2pq})$	$(1-e^{-2pq})$
72	11. 12	$\sum_1^r$	$\sum_0^r$
	16	$\frac{1}{r}\frac{-1}{1-r^2}$	$\frac{r}{1-r^2}$
	22	$\Big\{\frac{1-r^2}{r}$	$\Big\{r$
73	1	2^{-2a-1}	2^{-2a-2}
76	10, 12, 14	$2(1+r^2)$	$(1+r^2)$
78	7	$(e^{pq}-e^{-pq})$	$(e^{pq}+e^{-pq})$



CORRECTIONS

DE MA

NOTE SUR UNE MÉTHODE POUR LA REDUCTION D'INTEGRALES DEFINIES

ET SUR

SON APPLICATION à QUELQUES FORMULES SPÉCIALES.

Publiée dans les Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. — Deel II.

Page.	*Ligne.*	*au lieu de:*	*lisez:*
2	6	dx	$dx =$
	27	$\int_{-}^{\infty}$	$\int_{-q}^{\infty}$
8	6	a	0
10	20	$\Lambda_{h+3} p^2$	$\Lambda_h + 3 p^2$
	22	$\binom{h}{k m}$	$\binom{h}{k-m}$
12	5	nulles.	nulles. De même
13	9	$1^{h/1}$	$1^{4/1}$
15	5	e^{-px}	e^{+px}
	7	mettez le facteur $(p x^2 + 2 a x - p^2 q^2)$ au dénominateur.	
	15	$p I_h + (2h - 1)$	$p I_k + (2k - 1)$
16	1, 2	$(-q^2)^{k+1}$	$(-q^2)^{k-1}$
	15	$(10 p^2 q^2$	$+ (10 p^2 q^2$
22	15	$-\frac{4 k q^4}{(x^4 - q^4)^{k+1}}$	$+\frac{4 k q^4}{(x^4 - q^4)^{k+1}}$
	22	T_k	$p T_k$
22	23	U_k	$p U_k$
	24	V_k, V_{k+1}	$p V_k, U_{k+1}$
28	4	$l(q + x)^2$	$l(q - x)^2$
29	14	$1^{h/2}$	$1^{h/1}$
30	7	h	k
32	9	$2k - 1$	$2h - 1$
35	5 (*bis.*)	$k + 2$	$k + 1$
38	14	$h \Sigma$	4Σ
40	22	(4)	(11)
44	18 (*bis.*)	$\pm$	$+$
45	17	$(x - q^2)$	$(x - q)^2$
46	7	$I_{h,k}$	$F_{h,k}$
48	5	$x - q$	$x + q$
	17	$h . 2x$	$k . 2x$
49	4	$+ h x^{-h-1}$	$- h x^{-h-1}$
	4 (*bis.*)	e^{-px}	e^{px}
	15	$+ h - 1$	$+ k - 1$
51	20	:	=
53	6	$= p \varepsilon$	$= - p \varepsilon$

ONTLEEDKUNDIGE NASPORINGEN

OMTRENT

DENDROLAGUS INUSTUS.

DOOR

W. VROLIK.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

MET ZES PLATEN.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1857.

ONTLEEDKUNDIGE NASPORINGEN

OMTRENT

DENDROLAGUS INUSTUS.

DOOR

W. VROLIK.



Sedert weinige jaren kent men, door de zorg onzer Nederlandsche Naturalisten, waarin wij vooral den ijver te prijzen hebben van ons medelid SCHLEGEL en van den Heer S. MULLER, een zonderling geslacht van Kengoeroes, waaraan men den naam gaf van *Dendrolagus* *. — Bestemd om op boomen te leven, en dus ook om die te beklimmen, moesten zij, ten einde daartoe in staat te zijn, eene wijziging ondergaan in hunnen ligchaamsbouw en vooral in de gesteldheid hunner ledematen. Deze wijziging is intusschen geringer, dan men vooraf zoude vooronderstellen, en gaat niet veel verder dan de onderlinge verhouding der pooten, de vorm en de grootte der nagels. — De voorpooten namelijk zijn, in verhouding tot hetgene bij de gewone Kengoeroes plaats heeft, betrekkelijk veel langer en krachtiger, de achterpooten daarentegen, of liever de schenkels en de voeten, veel korter. De nagels zijn sterker gekromd, en die der voorpooten tevens veel langer dan bij de overige Kengoeroes; de staart is daarbij steviger en overal gelijkmatig behaard, zoodat hij minder bestemd is, om het dier bij het zitten en springen te onder-

* H SCHLEGEL en S. MULLER. Over drie Buideldieren uit de familie der Kengoeroes. In *Verh. over de Natuurl. Geschiedenis der Nederl. Overzeesche Bezittingen*, uitgegeven door C. J. TEMMINCK. Leiden 1839—1844.

steunen, dan wel bij het klimmen in evenwigt te houden. — Behalve deze kenmerken, worden door de H.H. H. Schlegel en S. Muller genoemd langer en stugger haar, korter en dikker snuit, langer staart, kleiner ooren, en eene zeer eigenaardige kleur.

Het tandenstelsel dezer dieren, welke men onder den Hollandschen naam van Boom-kengoeroes kan te zamen vatten, wijkt slechts in enkele opzigten van dat der overige Kengoeroes af. Het getal stemt, volgens de H.H. Muller en Schlegel, volmaakt overeen met dat der Kengoeroes met hoektanden (*Dorcopsis, Bettongia, Hypsiprymnus*): er zijn namelijk $\frac{6}{2}$ snijtanden, 1 + 1 boven hoektanden, $\frac{5+5}{5+5}$ maaltanden. De H.H. Muller en Schlegel geven $\frac{1+1}{1+1}$ hoektanden op; zij tellen derhalve ook hoektanden in de onderkaak, welke zij intusschen niet afbeelden, zoodat ik daaromtrent eene schrijf- of drukfout vermoed. De vorm der kiezen en hare kroonen is volmaakt dezelfde als bij de overige Kengoeroes. Even als bij deze, worden de twee voorste kiezen eerst bij het doorbreken van de achterste kies vernieuwd, en hare plaats door eene grootere kies vervangen. Door deze inrigting blijft het getal der kiezen, voor en na het uitkomen van de achterste kies, gelijk. De voorste melkkies is, als gewoonlijk, bijkans niet grooter dan de daarop volgende kiezen; maar de nieuwe, blijvende kies, welke de plaats van de eerste en tweede vervangt, is bijkans eens zoo groot als de volgende kiezen. De hoektanden zijn, even als bij *Dorcopsis,* naar evenredigheid kleiner dan bij de Nieuw-Hollandsche Kengoeroes met hoektanden (*Hypsiprymnus, Bettongia*). Hetzelfde heeft plaats met de verhouding der vier buitenste snijtanden der bovenkaak tot de beide middelste, welke bij *Dendrolagus* naar evenredigheid weinig kleiner zijn dan bij de Kengoeroes van Nieuw-Holland. Ook de snijtanden der onderkaak zijn naar evenredigheid smaller dan bij laatstgenoemde Kengoeroes. De Heer R. Owen heeft aan de buitenzijde van den hoektand in een der schedels van 's Rijks museum te Leiden eene groef herkend, welke echter geen standvastig verschijnsel blijkt te zijn.

Er zijn tot heden twee soorten van dit geslacht bekend: *D. ursinus* en *D. inustus.* De *D. ursinus* bereikt niet geheel de grootte van *Dorcopsis Brunii;* maar is veel krachtiger gebouwd. Oude voorwerpen hebben omstreeks de grootte van een haas. De kop is vrij dik en sterk, en de snuit niet zeer lang en stomp.

De snuit is, van de spleet der bovenlip, over zijne geheele voor- en bovenzijde met zeer fijne, enkele haartjes begroeid, welke overal de naakte huid laten doorschijnen, maar naar het voorhoofd allengs talrijker en langer worden. De haren der bovenlip en der zijden van den snuit staan digter bijeen en zijn langer dan die der overige deelen van den snuit. De mondopening strekt zich omstreeks tot aan de helft der lengte van den snuit uit. De oogen zijn niet zeer groot en liggen tamelijk hoog ter zijde van den kop, op de helft zijner lengte. De ooren zijn niet zeer groot, en hunne lengte bedraagt ongeveer een derde van die des geheelen kops. Zij loopen van boven in eene flaauw afgeronde punt uit, zijn lansvormig van gedaante, maar zoo digt met haar bekleed, voornamelijk van achteren en van binnen langs den bovenrand, dat hun eigenlijke vorm eerst bij nader onderzoek in het oog valt, en zij, daar deze haren bijkans ter halver lengte over hen heenreiken, veel grooter schijnen dan zij wezenlijk zijn. De oogleden zijn, inzonderheid het bovenste, op hunne achterste helft met borstelharen bezet. Diergelijke langere haren bevinden zich boven het oog en op den snuit. De pooten zijn krachtig, en de achterste naar evenredigheid kort. De nagels zijn buitengewoon sterk ontwikkeld, meer gekromd dan gewoonlijk, van onderen uitgehoold, en aan de punt afgerond. Die der voorpooten zijn, naar evenredigheid, veel grooter dan bij alle overige Kengoeroes, maar hunne onderlinge grootte wijkt niet van den gewonen regel af. Van onderen zijn de handen, of voorste voeten, tot aan het gewricht toe naakt, en deze naakte huid is, even als de geheele naakte ondervlakte van de eigenlijke of achterste voeten, in schubachtige strooken verdeeld. De nagels der achterste voeten zijn naar evenredigheid veel minder ontwikkeld dan die der voorste, en veel smaller en slanker dan bij de overige Kengoeroes, weshalve men hen ook, zoowel om deze redenen als uit hoofde van hunnen gekromden vorm, niet wel met hoeven kan vergelijken, waarmede zij toch bij de overige Kengoeroes hoofdzakelijk overeenkomen. De nagel van den buitensten teen is slechts weinig kleiner dan die van den derden, en daar deze teen korter is dan gewoonlijk, zoo strekt zich ook de punt van den nagel des buitensten teens tot over de helft der lengte van den nagel des derden teens uit. De twee binnenste, zamengegroeide teenen zijn met kleine, niet zeer sterk gekromde nagels voorzien, waarvan de punten ongeveer op dezelfde lijn staan als de punt van den nagel des buitensten teens. De staart is een weinig langer dan het geheele overige ligchaam, en neemt naar de punt allengs, maar niet zeer veel, in dikte af.

Het haar is op de bovendeelen, aan de zijden van het lijf, op den staart en de pooten, lang, regt en stug. Op den kop en aan de onderdeelen is het veel korter en meer wolachtig. Boven op den rug, achter de schouders, vormt het haar eene soort van kring, van waar het naar alle kanten, als uit een middelpunt, straalvormig heenloopt. Hierdoor gaat het haar der achterdeelen van den hals naar boven, en stuit het, tusschen de ooren, tegen het naar achteren gerigte kortere haar des kops aan, waardoor eene soort van kam gevormd wordt, welke zich dwars over het achterhoofd, van het eene oor tot het andere uitstrekt.

De hoofdkleur dezer soort is bruinachtig- in het purperroode overgaande, glanzend zwart. De kop, de onderdeelen van den romp en de binnenzijde der pooten zijn vaal lichtbruin, min of meer in het roestkleurige overgaande. De haren, welke den boven- en onderrand van het binnenvlak der ooren bekleeden, zijn rood bruin, en ook de haren des staarts hebben van boven, aan zijn wortel, eenen roestbruinen tint. De iris der tamelijk kleine en eenigzins diep in den kop liggende oogen is graauwachtig bruin; de neus en de voetzolen zijn roetzwart.

De Heer Muller vond deze soort in het district Lobo van de kust van Nieuw Guinea, alwaar zij door de Papoea's *Wangoerie* wordt geheeten. Zij bewoont er vooral het bergachtig gedeelte der kuststreek, alwaar zij zich bevindt op de kroonen van het hoog geboomte. De bewegingen van deze Kengoeroes zijn traag en vrij langzaam, zoowel in het klauteren als op den grond, waarover zij op de vier pooten heen huppelen. Zij schijnen derhalve, even als de Koeskoes en de Luiaards, hun heil te moeten zoeken in het geboomte. Muller en zijne reisgenooten hebben er zeer lang een wijfje levend van gehouden, dat zeer mak en vertrouwelijk was, ongeveer als een huishond. Het bewoog zich geheel vrij, in en rondsom de woning, en hield zich op Timor voornamelijk in een paar vijgenboomen op, welke digt bij de woning stonden. Het voedde zich uitsluitend met de vruchten en de jonge bladen van deze. Terwijl het sliep, zat het steeds zeer klein ineengedrongen, met den kop meer of min tusschen de voorpooten verscholen. Bij het eten zette het zich altoos, als een Eekhoren, overeind, terwijl het door middel van een der voorpooten het voedsel naar den mond bragt. Het kaauwde alles zeer langzaam en met de meeste bedaardheid. Nimmer werd eenig ander stemgeluid dan een zacht gebrom van dit dier vernomen.

De tweede soort, *D. inustus,* komt geheel met de vorige overeen, is

slechts een weinig grooter en wijkt van haar af, doordien de ooren van boven sterker afgerond zijn, en het haar, waarmede zij bekleed zijn, veel korter is en regelmatiger verdeeld. De derde teen der achterste voeten is langer, en de punt des nagels van den buitensten teen reikt dien ten gevolge slechts tot aan of digt bij den wortel des nagels van voornoemden langsten teen. De staart is een weinig langer, overal van gelijke dikte, en derhalve tegen de punt met langer haar bezet. Het haar, dat van den haarkring boven de schouders, langs den achterhals naar voren loopt, blijft die rigting tot op het midden van den kop behouden, en stoot hier aan het naar achteren gerigte haar des snuits; aldus op de bovenvlakte van het hoofd eene lijn vormende, welke zich in eene halfcirkelvormige bogt tot aan den boven-voorhoek van het oor uitstrekt. Eindelijk is ook de kleur van het geheele dier verschillend. Het haar namelijk is slechts van den wortel tot op het midden zwartachtig, en wordt aan de punten vuil geelachtig wit. Op de pooten en vooral aan de ondervlakte des ligchaams, neemt deze lichte kleur de bovenhand, terwijl zij op de kruin van het hoofd in het bruinachtige overgaat; de staart, waar de haren aan den wortel, in stede van zwart, donkerbruin zijn, is eenigzins valer dan al de overige deelen van het dier. De Papoea's in het distrikt Lobo noemen deze soort *Wakera*. Zij leeft ook in het hoog geboomte en voedt zich met wilde vruchten en bladeren, vooral met vijgen. Van deze laatste soort heeft gedurende korten tijd een exemplaar in onzen Zoölogischen tuin geleefd. Het kwam er in zeer gebrekkigen toestand, zoodat er niet veel gelegenheid geweest is, om waarnemingen omtrent dezen vrouwelijken *Dendrolagus inustus* te doen.

Een ander exemplaar heeft eenige jaren geleefd in den Zoölogischen tuin van Regents-Park te Londen. Gould * teekent er van op, dat dit dier in zijne zeden en gewoonten trager en minder levendig was dan de gewone Kengoeroes, welke hij *terrestrial* noemt. Het kon uren achtereen blijven zitten op den tak van den boom, welke in zijn hok stond, met den staart gerold rondsom zijn ligchaam, in eene dommelige houding. Somtijds echter was hij meer levendig, en zat hij regt op, met den staart naar beneden hangende.

Na den dood van gezegden *D. inustus* had het Bestuur van het Zoölogisch Genootschap *Natura artis magistra* de goedheid, er mij de ontleding van toe te staan, onder verbindtenis dat het geraamte later tot het uitmuntend museum

* J. Gould. The Mammals of Australia, P. VIII, London 1856.

des genootschaps zoude terugkeeren. Het was mij aangenaam, dat tot dergelijken arbeid mij de gelegenheid werd gegeven, en ik zeg het Bestuur, dat zoo dikwerf reeds mijne werkzaamheid steunde, daarvoor opentlijk dank. Voor zoo verre mij bekend is, kent men omtrent het maaksel dezer belangrijke diersoort slechts enkele bijzonderheden, door de Nederlandsche Natuuronderzoekers en door R. Owen * medegedeeld. Ik achtte daarom eene zoötomische monographie er over niet geheel overbodig, en neem de vrijheid, haar der Koninklijke Akademie ter plaatsing in hare werken aan te bieden.

BEENSTELSEL.

Hoe groot de verscheidenheid overigens moge wezen, welke het beenstelsel der Marsupialiën aanbiedt, is er echter een algemeen karakter in uitgedrukt, dat aan al de verschillende groepen eigen is. Behalve in den vorm des bekkens en in de buidelbeenderen, is dit algemeene kenmerk, gelijk Owen zulks het eerst leerde, gelegen in de openingen van het verhemelte en in het binnenwaarts uitspringen van den hoek der onderkaak. In vroeger uitgegeven opmerkingen over den Sarcophilus ursinus heb ik daaraan toegevoegd †, dat in alle Marsupialiën de schedel voorwaarts meer of min de gedaante heeft van eenen stompen kegel, met eene platte en regtstandige achtervlakte en eene platte bovenvlakte §. In de groep der vleeschetende Marsupialiën of Sarcophagen komt daarbij eene sterk ontwikkelde overlangsche kam, welke in de groep der vruchtetende of Poëphagen, waartoe de Dendrolagus behoort, ontbreekt. Hierdoor geeft de schedel van dezen ons bijna geheel het beeld terug eener vierzijdige pyramide. De jukbeensboog puilt niet sterk naar buiten uit, en bestaat uit een krachtig, vrij hoog jukbeensuitsteeksel des slaapbeens, waartegen zich een lang en achterwaarts puntig uitloopend jukbeen aanvoegt. De gedaante van den jukbeensboog verschilt derhalve zeer van die bij Thylacinus, Dasyurus en Sarcophilus, en nadert tot die van Hypsiprymnus, Macropus en Halmaturus. In gene is het karakter uitgedrukt van een vleeschetend, in deze van een vruchtetend dier. Hetgeen er van het aangezigt voor

* Proceedings of the Zoological Society of London, 1852, N°. CCXLIV, pag. 103.

† W. Vrolik. Ontleedkundige opmerkingen over den *Dasyurus* (*Sarcophilus*) *ursinus*. In Tijdschr. voor de wis- en natuurkundige wetenschappen, uitgegeven door de Eerste Klasse van het Koninklijk Nederlandsch Instituut enz. D. IV. bl. 153. Amsterdam 1851.

§ Zie voor al de bijzonderheden, het geraamte betreffende, Pl. 1.

deze jukbeensbogen overblijft, is niet zoo kort, breed en ineengedrongen als in Sarcophilus, maar ook niet zoo lang en spits uitloopende als in Perameles, of ook in Halmaturus en Hypsiprymnus. Het nadert eenigzins meer tot den vorm van Phalangista, en heeft een stomp, schuins afgesneden voorst uiteinde.

Even als in de schedels van al de overige Marsupialiën komen uit de grondvlakte van de zijstukken des achterhoofdbeens, of uit de zoogenaamde *exoccipitalia* van Owen, meer of min stompe jugulair uitsteeksels, welke in spieraanhechting met de tepelachtige uitsteeksels van den mensch overeenkomen. Zij zijn in den Dendrolagus, even als in de overige Kengoeroes zeer lang.

Gelijk Owen zulks reeds voor vele Marsupialiën opgaf, zijn het schub-steenachtig en tympanisch gedeelte van het slaapbeen nog duidelijk door naden van elkander gescheiden, en is zelfs in het tympanisch gedeelte nog meer of min de trommelvliesring zigtbaar. Dit is duidelijk terugblijven op eenen vroegeren foetalen vorm van den mensch. Er is niets zigtbaar van de beenige trommelblaas, welke men bij de Knaagdieren vindt, en waarvan ik nog eene aanduiding aantrof bij den Sarcophilus ursinus.

De geledingskuil voor de onderkaak, welke ik in Sarcophilus, even als in de vleeschetende zoogdieren, dwars vond, heeft in Dendrolagus eene overlangse en schuins naar buiten gaande rigting. De achterste geledingsknobbel is daarom naar buiten gelegen. Naar voren wordt deze geledingskuil begrensd door het jukbeen, dat zich aldaar door een duidelijken naad afbakent. Met uitzondering van de Petauri wordt deze geledingskuil in al de Marsupialiën niet uitsluitend door het slaapbeen, maar ook door het jukbeen gevormd.

Even als bij de Kengeroes, den Koala en den Wombat, stuit de groote vleugel van het wiggebeen tegen het wandbeen aan. De zwaardswijze uitsteeksels zijn een paar smalle beenplaten, die naar voren zich met de oogkasplaten van de voorhoofdsbeenderen en met het zeefbeen verbinden. In plaats van Turkschen zadel vindt men eene onbegrensde beenachtige ruimte, welke achterwaarts, zonder clivus, grenst aan het breede en platte grondstuk des achterhoofdbeens. Achter de zwaardvormige uitsteeksels en aan weerszijde der plaat, die den Turkschen zadel vervangt, vindt men eene groote en wijde spleet, die de plaats vervangt van gezigtszenuwgaten, van bovenste oogkuilspleet en van ronde gaten des wiggebeens. Daarachter zitten de kleine en smalle eironde gaten. Even als ik zulks in Sarcophilus ursinus opmerkte, doorboren de carotidenkanalen het ligchaam van het wiggebeen en

komen zij aan de grondvlakte des schedels te voorschijn, vlak achter de plaat, die de plaats van Turkschen zadel vervangt. Boven den inwendigen gehoorgang is, even gelijk ik dit vroeger voor Sarcophilus opteekende, eene vrij diepe kuil, waarin zich het zijdelings aanhangsel der kleine hersenen plaatst. Gescheurd gat en voorts knokkelgat zijn duidelijk.

De wandbeenderen komen aan de bovenvlakte des schedels met een duidelijken pijlnaad te zamen. Aan weêrszijden van den pijlnaad is eene smalle en platte oppervlakte, die zich achterwaarts voortzet in de breedere even zoo platte oppervlakte van het tusschenwandbeen, en voorwaarts overgaat in de schuins gerigte bovenvlakte der voorhoofdsbeenderen. Deze eigenaardige vrij smalle platte bovenvlakte des schedels grenst zijwaarts aan de halvemaanswijze lijn, die de gewelfde slaapgroeve omlijst, en verbindt zich achterwaarts bijna regthoekig met de schier regt opstaande en platte schub van het achterhoofdsbeen. Even als bij de Marsupialiën in het algemeen onderscheiden de voorhoofdsbeenderen zich door eene aanmerkelijke uitgebreidheid en door het groote deel, dat zij hebben aan de vorming der neusholte. Zij zijn echter niet, zoo als bij Thylacinus en Sarcophilus van het overige bekkeneelsruim door eene insnoering gescheiden. Evenmin als bij Halmaturus en Hypsiprymnus is er eenige aanduiding van buitenst of achterst oogkas-uitsteeksel. Er is dus achterwaarts geen spoor van afscheiding voor de oogkas. Het traanbeen breidt zich uit over de voorvlakte van het aangezigt, en is aldaar met twee openingen doorboord. Dat dit gemis van insluiting des traanbeens in de oogkas een bewijs is van mindere volmaaktheid, werd te regt door Owen opgegeven.

De neusbeenderen zijn lang en smal, maar verbreeden zich achterwaarts. Van de tusschenkaakbeenderen valt niet veel meer te zeggen dan dat zij eenen grooten omvang hebben, en dat elk van hen drie snijtanden bevat. Hun aangezigtsnaad is duidelijk zigtbaar. De kleine bovenhoektand zit vlak achter dezen naad. De aangezigtsoppervlakte der opperkaakbeenderen is op verre na niet zoo gewelfd als in den Sarcophilus, maar ook niet zoo ingedeukt als in Hypsiprymnus en Halmaturus. Het onderoogkuilsgat staat door zijn geringen omvang sterk tegenover den grooten omvang dezer opening bij Sarcophilus. In de verhemelte oppervlakte der opperkaak- en der verhemeltebeenderen, vindt men slechts enkele sporen der onvolkomen beenwording, waarvan vele andere Marsupialiën, vooral Perameles lagotis bewijs geven, en welke het onvolkomen verhemelte der Vogels in het geheugen terugroept. —

Zeer eigenaardig is de wijze, waarop het beenig verhemelte achterwaarts in eene verheven, eenigzins omgekrulde halvemaanswijze beenige lijst uitloopt, welke buitenwaarts uitspringt en aan weêrszijden in de vleugelgroeve overgaat. Hierdoor krijgt de achterste neusopening eenen grooten omvang. De vleugelgroeve is aan weêrszijden zeer diep.

In de onderkaak is het kroonswijze uitsteeksel kort en breed, heeft de geledingsknobbel eene schuinsche rigting van buiten naar binnen, en vertoont zich eene bij vele Marsupialiën voorkomende, scherpkantige en diepe kuil aan de buitenvlakte van elken vleugel der onderkaak voor den masseter. In den bodem dier kuil is eene groote en scherprandige opening. Bij dat alles voegt zich het eigenaardig kenmerk van de onderkaak der Marsupialiën, gelegen in het naar binnen uitspringen van haren hoek, onder de gedaante van een stomppuntig uitsteeksel. Dit geeft aan hunne onderkaak eene zonderlinge, bielvormige achterwaartse verbreeding. In de wervelkolom is er weinig, dat het geraamte van den Dendrolagus doet verschillen van dat der overige Viervoetige zoogdieren. Men vergelijke voor hetgeen ik daaromtrent zeg, de eerste plaat, welke den Dendrolagus inustus voorstelt op de helft van zijne natuurlijke grootte. Er zijn zeven halswervelen. Hunne bovenste en onderste dwarse uitsteeksels (*diapophysen* en *parapophysen*) zijn aan den wortel ineengesmolten, en laten slechts eene zeer kleine opening over, tot doorlating van de wervelslagader, welke derhalve, gelijk zich ook uit den geringen omvang der hersenen laat afleiden, zeer dun moet wezen. Deze opening is ter naauwernood zigtbaar in den zevenden halswervel. De eerste en tweede halswervel missen de opening ten eenen male. In den eersten halswervel of atlas zijn de diapophyse en de parapophyse tot een zwaar uitsteeksel zamengesmolten, dat in eenen knobbel uitloopt. Het doornwijze uitsteeksel van den tweeden halswervel is in al zijne doormetingen zeer sterk ontwikkeld, gelijk dit in de meerderheid der Viervoetige zoogdieren plaats heeft. Het heeft eene bijna vierzijdige gedaante, maar loopt naar achteren en naar voren in eene stompe punt uit. De onderste dwarse uitsteeksels der 3de, 4de, 5de en 6de halswervelen gaan in scherp uitspringende kanten over, welke, vooral in den zesden halswervel, zeer sterk ontwikkeld zijn, even gelijk men zulks in zoovele andere Viervoetige zoogdieren ziet geschieden. De doornwijze uitsteeksels der drie achterste halswervelen zijn naar voren gerigt, dat van den zevenden halswervel is zeer lang. De rugwervelen zijn dertien ten getale. Hunne doornwijze uitsteeksels nemen regelmatig van voren naar achteren in lengte af;

die van de drie achterste rugwervelen hebben eene meer vierzijdige gedaante. Er zijn zes lendenwervelen, waarin de voorste schuinse uitsteeksels sterk uitspringen en zich met breede uiteinden naar voren verlengen. Uit den achterrand der wortels van deze voorste schuinse uitsteeksels komen zeer korte bijkomende stijlvormige uitsteeksels; zoodat de vorksgewijze splijting der achterste schuinse uitsteeksels en de invatting der voorste veel zwakker is dan bij vele andere Viervoetige zoogdieren, vooral dan bij de Carnivoren. De dwarse uitsteeksels der lendenwervelen nemen regelmatig in lengte toe van voren naar achteren; hun vorm is vierzijdig. Evenzoo zijn vierzijdig de doornwijze uitsteeksels, die, even gelijk dit bij zoo vele andere Viervoetige zoogdieren plaats heeft, zich naar voren rigten; zoodat er eene duidelijke tegenoverstelling plaats heeft tusschen de doornwijze uitsteeksels der rug- en der lendenwervelen. De ligchamen der lendenwervelen verbreeden en versterken zich regelmatig achterwaarts; eene gesteldheid, gevorderd, gelijk ik dit elders reeds voor den gewonen Kengoeroe opmerkte, voor een dier, dat den romp opgerigt moet houden.

Het heiligbeen bestaat uit twee wervelen, waarvan de voorste de breedste is en het grootste deel uitmaakt van de heilig- en darmbeensvereeniging. De ligchamen dezer heiligbeenswervelen zijn vrij smal; maar de dwarse uitsteeksels zijn zwaar en springen vleugelsgewijze zijwaarts uit. De darmbeenderen zijn in eenen hoek verbonden met het heiligbeen, zoodat ook de as des bekkens eenen hoek moet maken met de as van de wervelkolom. Er zijn zeventig staartwervelen, op verre na niet zoo stevig en zwaar als in de gewone Kengoeroes. Zij bieden de gewone kenmerken aan der staartwervelen van de Viervoetige zoogdieren; d. i. dat de voorste door hunne dwarse en schuinse uitsteeksels nog de kenmerken blijven behouden van lenden- en heiligbeenswervelen, terwijl achterwaarts de verlengde ligchamen der staartwervelen door eenvoudige geledingsvlakten zich met elkander verbinden, ongeveer even als vingerleden, en meer of min puntige knobbels de plaats der uitsteeksels vervangen. Zeer sterk ontwikkeld zijn de onderste V-vormige uitsteeksels of de bloedapophysen van Owen, die van voren naar achteren regelmatig in grootte en gaafheid afnemen; maar, met uitzondering van de vier achterste, aan alle staartwervelen voorkomen.

Hetzelfde getal hals-, rug-, lenden- en heiligbeenswervelen werd door de H.H. Schlegel en Muller bij Dendrolagus opgemerkt. Het schijnt standvastig in de onderscheidene vormen van Kengoeroes. De bovengenoemde

natuurkundigen vermelden zulks althans voor Halmaturus, Dorcopsis en Dendrolagus, waarbij ik, volgens mijne bevinding, kan voegen Macropus en Sarcophilus.

Van het borstbeen valt niet veel meer te zeggen, dan dat het uit zes langwerpige segmenten of sternebrae bestaat, waarvan het voorste den vorm heeft van een handvat, en het achterste van een zwaardswijze uitsteeksel. Met twee schuins gerigte gledingsvlakten van het handvat geleden zich de sleutelbeenderen, en met het zwaardswijze uitsteeksel verbindt zich een plat kraakbeen. Zoo als de regel zulks medebrengt, zijn er even zooveel ware ribben als segmenten in het borstbeen; derhalve zes ware en zeven onware ribben.

De borstkas is lang en smal en herinnert geheel die der overige Viervoetige zoogdieren; zoo men slechts uitzondert, dat, even als ik dit ook voor den gewonen Kengoeroe elders opteekende, het eerste ribbenpaar zich onderscheidt door zijne kortheid, zijne breedte en zijne dwarse rigting. Deze overeenkomst met den menschelijken vorm is ongetwijfeld in verband te brengen met de opgerigte houding van den romp.

Het bekken heeft den vorm, welke met geringe wijzigingen aan alle Marsupialiën eigen is. Zijne gedaante is in de lengte uitgerekt; de darmbeenderen zijn smal, de schaambeensvereeniging heeft eene aanmerkelijke lengte, de eironde gaten hebben eenen grooten omvang, de schaambeensboog is door een bijzonder beenstuk aangevuld; de eminentia ileo-pectinea puilt sterk uit, en de buidelbeenderen zijn lang en stevig. Op welke wijze vele dezer bijzonderheden in verband moeten gebragt worden met de spieraanhechting zal nader blijken, en wat hare verhouding aangaat tot de eigenaardige voortplanting der Marsupialiën, acht ik het onnoodig te herhalen, hetgeen elders door mij gezegd is. De ledematen hebben den vorm der Kengoeroes, maar de onevenredigheid der voor- en achterpooten is veel geringer dan bij hen. De voorste ledematen zijn betrekkelijk veel zwaarder en langer dan bij Halmaturus en Macropus. Er zijn twee krachtige, flaauw gebogen sleutelbeenderen, waarvan het acromiaal uiteinde niet tot aan het acromion reikt, maar er door eenen band mede vereenigd is. In het schouderblad is de groeve boven de graat niet zoo ruim als in vele Viervoetige zoogdieren, welke zich op hunne voorste ledematen steunen; het ravenbekswijze uitsteeksel wordt door een kleinen beenknop vervangen. Het opperarmbeen is vrij zwaar; sterk ontwikkeld is vooral zijn buitenste of groote knobbel, en zeer diep is de goot voor de tweehoofdige armspier. De sterk uitspringende binnenste knokkel is, even

als bij zoovele andere Zoogdieren, doorboord. Spaakbeen en ellepijp zijn beide vrij zwaar; vooral verbreedt het spaakbeen zich op belangrijke wijze benedenwaarts.

In den handwortel tel ik drie beenderen in de bovenste rij: een groot been met gewelfde bovenvlakte, dat zich met het spaakbeen geleedt en dat eigenlijk uit het scheepswijze been en uit het halvemaanswijze been is zamengesmolten; daar naast zit een vrij zwaar driekantig been, en achter dit het erwtebeen. In de tweede rij tel ik vier beenderen: twee veelhoekige, een gehoofd en een haaksgewijs been. Het onderste uiteinde der ellepijp eindigt in eenen knop, welke ingevat is in eene gewrichtskom van het driekantig been. Het driekantig been is door middel van eenen band vereenigd met het halvemaanswijze been. Bij de pronatie en supinatie van de hand zal derhalve het driekantig been als over eene spil, door de ellepijp gevormd, heenglijden, hetgeen aan de omkanteling der hand eene groote mate van vrijheid moet geven. Tusschen het uit het halvemaanswijze en scheepswijze zamengesmolten en het groot veelhoekig been ligt een klein kogelrond zaadbeentje. De vijf metacarpaal-beenderen zijn in eene rij naast elkander geplaatst, zoodat de duim niet tegenstelbaar is. De duim bestaat uit twee leden; al de overige vingers hebben er drie.

De nagelbeenderen zijn zwaar en sterk haakvormig. Aan de onderste ledematen is vooral opmerkelijk, dat de onevenredigheid van dij en schenkel, waarop de meerdere lengte der achterste ledematen, en dus de eigenaardige bewegingswijze der eigentlijke Kengoeroes berust, bij Dendrolagus geheel wegvalt.

Terwijl bijv., volgens Schlegel en Muller, het scheenbeen bij Halmaturus bijkans een derde, bij Dorcopsis een vierde langer is dan het dijbeen, zijn deze beenderen schier even lang bij Dendrolagus. Het gevolg hiervan is, dat de stand en de gang van Dendrolagus ten eenenmale verschillen van die der eigentlijke Kengoeroes. Het is deze wijziging, welke hem een klimmend, in plaats van een zich met geweldige sprongen voortbewegend dier doet worden. Maar dit verschil daargelaten, komen de onderste ledematen geheel met die der gewone Kengoeroes overeen, zoo zelfs, dat ik de beschrijving, welke ik vroeger van deze gaf, nu geheel op die van Dendrolagus zoude kunnen toepassen. Van het dijbeen valt niets anders op te merken, dan dat het vrij dik en zwaar is. Het kuitbeen is aanvankelijk op vrij grooten afstand van het scheenbeen verwijderd, maar voegt er zich beneden-

waarts zeer digt aan; deze aanvoeging geschiedt iets lager dan bij de eigentlijke Kengoeroes. Het scheenbeen heeft van boven eene driehoekige gedaante, en loopt aldaar in een naar voren uitspringenden kam uit, welke intusschen niet zoo scherp is als bij Halmaturus en Macropus. Er is, even zoo als ik dat vroeger reeds bij Macropus waarnam, geene knieschijf; maar wel, zoo als ook bij vele andere Marsupialiën, in den zijdelingschen band van de buitenzijde des kniegewrigts een halvemaanswijs beenstuk.

In den voetwortel merk ik vooreerst het kootbeen en het hielbeen op. Het kootbeen heeft eene breede en sterk gewelfde bovenvlakte, waarmede zich de beide beenderen des schenkels geleden. Aan de binnenzijde gaat er langs heen de binnenste enklaauw, gevormd door het scheenbeen, en aan de buitenzijde de buitenste enklaauw, gevormd door het kuitbeen. Het onderste uiteinde des kuitbeens rust dan verder op een naar buiten uitspringend gedeelte van het hielbeen. Deze inrigting verschilt ten eenenmale van diegene, welke ik vroeger bij Macropus opteekende. Zij is ongetwijfeld in verband met de behoefte, om eene breede en stevige grondvlakte te verschaffen, waarop het ligchaam kan rusten, als de Dendrolagus op eenen tak nederhurkt. Om dezelfde reden vormt het hielbeen geen langen en smallen hefboom tot het te weeg brengen van sprongen, gelijk in Halmaturus en Macropus; maar verbreedt het zich aan zijne ondervlakte, en splitst het zich dan voorwaarts in tweeën, om zich te geleden met de beide overige beenderen van den voetwortel, welke derhalve de drie wigvormige beenderen en het teerlingbeen vertegenwoordigen. Het buitenste dezer voorste beenderen des voetwortels heeft twee gelekingsoppervlakten, om zich te verbinden met de twee korte, breede en zware metatarsaalbeenderen van de beide buitenste teenen; het binnenste heeft evenzoo twee, maar kleinere voorste gewrigtsoppervlakten, om zich te geleden met de lange, maar tengere metatarsaalbeenderen van de beide binnenste teenen. Daar tegen aan ligt een vijfde zeer kort en puntig uitloopend metatarsaalbeen, dat geheel op zich zelf staat, en niet veel verder reikt dan het achterste uiteinde van de binnenste tengere metatarsaalbeenderen. Met de twee buitenste metatarsaalbeenderen zijn breede, platte en stevige, — met de binnenste smalle en tengere teenen geleed. Elke teen bestaat uit drie leden. Tusschen de knoppen der metatarsaalbeenderen en de achterste leden der buitenste teenen bevinden zich zware zaadbeenderen, paarsgewijze aldaar geplaatst. Het blijkt derhalve, dat de inrigting van den voet is even als bij de eigentlijke Kengoeroes, met dat verschil slechts, dat in de beide

buitenste teenen, de beenderen, in plaats van in de lengte uitgerekt te wezen, kort en breed zijn, waaruit eene geheel andere bewegingswijze moet voortvloeijen.

Ik acht het niet ongepast, aan deze beschrijving van het geraamte eene opgave te voegen van de hoofdafmetingen der ledematen.

BOVENSTE OF VOORSTE LEDEMATEN.

Lengte van het schouderblad, van den knobbel, die de plaats vervangt van het ravenbekswijze uitsteeksel, tot aan den achtersten of ondersten hoek 0,078.

Grootste breedte of hoogte des schouderblads 0,044.

Lengte van het sleutelbeen 0,045.

Lengte van het opperarmbeen, van de bovenvlakte van het hoofd tot aan den buitensten knokkel 0,105.

Lengte van de ellepijp 0,156.

Lengte van het spaakbeen 0,114.

Lengte van de hand, van den onderrand van het spaakbeen tot aan den top van den middelsten vinger 0,095.

ONDERSTE OF ACHTERSTE LEDEMATEN.

Lengte van het heupbeen, genomen van het midden van den kam tot aan den zitbeensknobbel 0,142.

Afstand van den eenen tot aan den anderen voorbovensten knobbel des darmbeens 0,098.

Afstand van den eenen tot aan den anderen zitbeensknobbel 0,071.

Lengte der schaambeensvereeniging 0,045.

Lengte der buidelbeenderen 0,066.

Lengte van het dijbeen, van den grooten draaijer tot aan den buitensten knokkel 0,15.

Lengte van het scheenbeen, van zijnen kam tot aan den binnensten enklaauw 0,158.

Lengte van het kuitbeen, van zijnen bovensten knop tot aan den buitensten enklaauw 0,146.

Lengte van den voet, van den hielbeensknobbel tot aan de punt van den middelsten of langsten teen 0,156.

SPIERSTELSEL.

Kaauwspieren. Van de kaauwspieren valt niet veel meer op te teekenen, dan dat de slaap- en kaauwspier (M. temporalis en masseter) zeer sterk ontwikkeld zijn. De masseter hecht zich vast met eene stevige peesachtige uitbreiding aan den voorsten wortel van den jukbeensboog, d. i. aan het jukbeensuitsteeksel van het opperkaakbeen. Z. Pl. III, *b.* Tusschen de beide takken der onderkaak ligt de M. mylohyoideus, die van het grondstuk des tongbeens afkomt en zich hecht aan den onderrand van het voorste gedeelte der beide helften van de onderkaak en aan hare kinvoeg. Z. Pl. II, *a, a.* Hij vormt derhalve op de gewone wijze den bodem der mondholte.

De tweebuikige kaakspier (M. digastricus maxillae inferioris) ligt aan weerszijden der binnenvlakte van de onderkaak. Zij is, zoo als bij al de Zoogdieren van lageren rang dan de Quadrumanen, eene eenbuikige spier, welke als afvoerder der onderkaak achter den oorsprong van den sterno-cleidomastoideus afkomt van het jugulair uitsteeksel van het achterhoofdsbeen, en zich naar voren aan den onderrand van elke helft der onderkaak vasthecht. Z. Pl. II, *c. c.* Door vergelijking met hetgeen ik vroeger van den Sarcophilus opteekende, blijkt dat de tweebuikige kaakspier van dezen vrij wat krachtiger is dan van den Dendrolagus.

Van den geniohyoideus en genioglossus teeken ik alleen op, dat zij aanwezig zijn.

Spieren van den hals. De sterno-hyoideus en sterno-thyreoideus zijn zeer lang. Pl. II. *b. b. c. c.*

De omohyoideus is eene lange, smalle en platte spier, zonder intermediaire pees, gaande van het tongbeen naar het schouderblad. Pl. II, *d. d.*

De sterno-cleidomastoideus komt van het jugulair uitsteeksel van het achterhoofd, en gaat in schuinse rigting met twee bundels naar voren, waarvan de een, M. sterno-mastoideus zich hecht aan het voorste uiteinde van het borstbeen, de andere M. cleido-mastoideus aan het borstbeensuiteinde van het sleutelbeen. Zoo men deze beschrijving vergelijkt met hetgeen ik van den Sarcophilus opteekende, blijkt, dat de cleidomastoideus bij dezen veel zwakker is, hetgeen ook met zijn zwakker sleutelbeen overeenstemt. Pl. II. *f. f. f. f.*

Naast de inplanting van den cleidomastoideus aan het sleutelbeen, hecht zich daaraan vast de M. acromio-basilaris, die met eene scherp peesachtige strook van het dwarse uitsteeksel van den eersten halswervel komt, bijkomen-

de spierhoofden ontvangt van de dwarse uitsteeksels der voorste halswervelen, zich achterwaarts verbreedt, en zich dan inplant aan het acromion des schouderblads en aan het acromial uiteinde des sleutelbeens. Pl. II, *g. g.*

De M. masto-humeralis, waarvan ik nog eene aanduiding vond bij Sarcophilus, ontbreekt.

Spieren van den rug. De trapezius is eene breede spier, die van voren afkomt van den kam des achterhoofds en van den nekband, met dwars gerigte vezels, welke in eene peesplaat overgaan, die de onderliggende nekspieren bedekt. Naar achteren toe ontvangt hij zijne spiervezelen van de doornwijze uitsteeksels der achterste hals- en der voorste rugwervelen. In de streek des schouderblads komen al de spiervezelen te zamen, om zich vast te hechten aan zijne graat en aan het acromial uiteinde des sleutelbeens. Pl. III, *d. d. d.*

De breede rugspier (M. latissimus dorsi) neemt achterwaarts oorsprong van eene lange en breede peesplaat, die eene schede vormt voor het achterste gedeelte van de lange rugspier en van de heiligbeens-lendenspier (M. longissimus dorsi en sacrolumbaris), en tot op het midden van den rug reikt. Hare spiervezelen vormen eene driehoekige breede plaat, waarvan een deel zich vasthecht aan de beenachtige gedeelten der achterste ribben. Van voren versmalt zij zich, wordt gedeeltelijk bedekt door den trapezius en hecht zich vast aan de binnenste, scherpe lijn van het opperarmbeen. Van de plaats dier aanhechting gaat, gelijk dit reeds voor zoovele zoogdieren door mij, en onlangs ook voor den mensch door ons medelid Halbertsma opgeteekend werd, een bundel af, welke langs het lange hoofd van de driehoofdige armspier heengaat, en zich peesachtig inplant aan den binnensten knokkel van het opperarmbeen en aan het elleboogsuitsteeksel. Pl. III, *h. h. h. h**.

De groote gemeenschappelijke strekspier der ruggegraat, bestaat, zooals gewoonlijk bij de Zoogdieren geschiedt, uit drie zware bundels, waarvan de eene, tegen de doornwijze uitsteeksels aan liggende, is de M. spinalis dorsi, de tweede of middelste de M. longissimus dorsi, en de derde of buitenste de M. sacrolumbaris. Deze laatste is de zwakste en smelt ineen met de vierkante lendenspier.

De splenius capitis et colli is eene zware spier, die van den achterhoofdskam en van het dwarse uitsteeksel van den eersten halswervel afkomt, om met schuins naar achteren gaande spiervezelbundels zich vast te hechten aan de doornwijze uitsteeksels der halswervelen en der drie voorste rugwervelen.

Naast den splenius bevindt zich de opligter van den hoek des schouderblads, die van de dwarse uitsteeksels der halswervelen komt, en zich aan den voorsten hoek van den bovenrand des schouderblads gaat vasthechten.

De biventer cervicis met den complexus is eene zeer zware spier, die van de achterhoofdsgraat afkomt, als ook van de dwarse uitsteeksels der halswervelen, om zich vast te hechten aan de doornwijze uitsteeksels der voorste rugwervelen. Hij is met eene menigte van peesstrooken doorsneden. Zeer zwaar is ook de spinalis cervicis. Het blijkt derhalve, dat sterk ontwikkeld zijn de spieren, waardoor de oprigting van den hals wordt te weeg gebragt, gelijk zulks bij een klimmend zoogdier gevorderd wordt.

De rhomboïdeus is daarentegen zeer zwak.

De vierkante lendenspier is eene zware spier, uit twee duidelijk gescheiden hoofdbundels bestaande, een smallen achtersten en een breeden voorsten. De smalle achterste komt van de schuinse uitsteeksels der lendenwervelen, vult de goot tusschen deze en de dwarse uitsteeksels, smelt aldaar ineen met den sacrolumbaris en plant zich in aan het achterste gedeelte van den kam des darmbeens. De voorste breedere bundel komt van de dwarse uitsteeksels der lendenwervelen, en plant zich in aan de onderste rib en aan de voorvlakte van den kam des darmbeens met dwars gerigte en eenigzins waaijerswijze uitgebreide spiervezelen. Er komt een derde bundel bij, die afkomt van de achtervlakte van het wervel-uiteinde van de drie onderste ribben, langs de voorste strook heengaat, en er zich zijwaarts door eene intermediaire pees mede verbindt, om zich in te planten aan het darmbeen. (Pl. IV. *a,a, b,b.*) Het blijkt derhalve, dat de vierkante lendenspier zeer zwaar is, even gelijk dit vroeger van den Macropus door mij werd opgeteekend.

In de psoasspier vertoont zich de verhouding, welke ik vroeger bij den Macropus waarnam en ook bij den Sarcophilus opteekende. De psoas minor is namelijk eene zware spier, die zich vasthecht aan de eminentia ileopectinea. De psoas major slaat zich over den horizontalen schaambeenstak heen, om met de binnenste darmbeensspier ineen te smelten, en zich daarmede in te planten aan den kleinen draaijer van het dijbeen. Even als bij Macropus en Sarcophilus gaan aan weêrszijden, tusschen de beide psoasspieren, de dijvaten heen, om zich in de dij te verspreiden. (Pl. IV. *c, c, d, d.*) Ik zal niet behoeven te herhalen hetgeen ik in mijne aanteekeningen over Macropus meer in het breede vermeldde, dat genoemde inplanting van psoas minor een krachtig middel is tot optillen der achterste ligchaamshelft, en dat

de doorgang der dijvaten tusschen de peesachtige gedeelten van psoas major en minor deze vaten behoedt voor drukking bij de zamentrekking dezer spieren.

De iliacus internus gaat van de binnenvlakte van het darmbeen regt naar beneden, om zich met psoas major in te planten aan den kleinen draaijer van het dijbeen (Pl. IV. *c.*).

Buikspieren. In de buikspieren vind ik de gesteldheid, welke, blijkens mijne aanteekeningen bij Macropus en Sarcophilus, voor de Marsupialiën typisch blijkt te zijn. Zooals Pl. II aantoont, komt de buitenste schuinse buikspier met schuins gerigte spiervezelen van de achterste ribben af. Deze spiervezelbundels gaan gedeeltelijk in eene peesplaat over, welke den voorwand vormt van de schede der regte buikspier; gedeeltelijk verliezen zij zich in den dijboog en voor een derde deel hechten zij zich aan den buitenrand van het marsupiaalbeen (Pl. II. *x, x.*).

De regte buikspier hecht zich binnenwaarts aan de witte lijn, en plant zich, even gelijk ik zulks ook bij Macropus en Sarcophilus opmerkte, aan den knop en aan den binnenrand in van het marsupiaalbeen (Pl. II. *y, y, y, y, y, y.*). Noch in de buitenste schuinse, noch in de regte buikspier vond ik peesachtige inschrijvingen.

De pyramidaalspier komt mij nog sterker ontwikkeld voor dan in Macropus. Dit is niet ongewigtig; vermits ik, zoowel bij Dasyurus macrourus als bij Sarcophilus ursinus,— Marsupialiën met zoo geheel andere bewegingswijze —, de pyramidaalspier zag ontbreken. Bij den Dendrolagus, gelijk Pl. II. *z, z* aantoont, wordt de pyramidaalspier door de regte buikspier bedekt, en beslaat zij de geheele ruimte tusschen het borstbeen en de schaambeensvereeniging. Zij hecht zich aan de witte lijn en slaat zich achter het marsupiaalbeen om, ten einde zich te vereenigen met de peesplaat van den M. obliquus internus en transversus. Deze aanmerkelijke uitbreiding en krachtvolle ontwikkeling der pyramidaalspier is belangrijk. Zij strekt vermoedelijk, om de achterste ligchaamshelft met meerdere kracht en met meer gemak op te ligten. De binnenste schuinse en de dwarse buikspier hechten zich niet aan het marsupiaalbeen.

Staartspieren. Het laat zich gemakkelijk begrijpen, dat de staartspieren van den Dendrolagus zeer sterk ontwikkeld moeten zijn. Maar uit hetgeen J. F. MECKEL *

* J. F. MECKEL System d. Vergl. Anat. Th. III p. 430. Halle 1828.

zegt omtrent de staartspieren van den Kengoeroe blijkt mij, dat zij daarmede hoofdzakelijk overeenkomen.

Tegen de doornwijze uitsteeksels der lendenwervelen aan ligt eene gemeenschappelijke spiermassa, waaraan Meckel den naam geeft van buitensten opligter van den staart. Zij komt van de doornwijze uitsteeksels der lendenwervelen, en gaat met afzonderlijke spierhoofden en pezen naar de schuinsche uitsteeksels. Meer achterwaarts, aan den staart zelven, bestaat deze binnenste opligter van den staart uit eene opvolgende reeks van spiertongetjes, die elk op zich zelve afkomen van de doornwijze uitsteeksels en zich inplanten aan de schuinsche uitsteeksels van een volgenden wervel (z. Pl. V fig. 6, *a*).

Er naast ligt de buitenste opligter van den staart, die veel zwaarder is, en in de goot ligt, gevormd tusschen de schuinse en dwarse uitsteeksels. Hij bestaat aanvankelijk uit eene gemeenschappelijke spiermassa, die het lendendeel der spier uitmaakt, en zich spoedig splitst in eene menigte van allengs dunner en langer wordende spiervezelbundels, die in zeer lange en dunne pezen overgaan, welke zich vasthechten aan de schuinse uitsteeksels der staartwervelen of aan de knobbels, die de plaats daarvan vervangen. Deze pezen zetten zich voort tot aan de punt van den staart (Pl. V fig. 6, *b*, *b*, *b*.).

Voor de zijdelingse buiging van den staart dienen de M. M. intertransversarii, die tusschen de dwarse uitsteeksels liggen. Voorts is naar buiten geplaatst een M. ischio-coccygeus, die van den achtersten rand van het darmbeen afkomt, als ook van het zitbeen, en, met op zich zelve staande bundels en pezen, zich vasthecht aan de dwarse uitsteeksels der voorste staartwervelen. Hij is ineengesmolten met het spierhoofd, dat zich voegt aan de buigspier van de dij, en daarvan een bijkomend spierhoofd uitmaakt (z. Pl. V. fig. 6, *c*, fig. 7, *a*, *a*, *a*.).

Aan de onder- of buikvlakte van den staart vertoont zich de volgende spierverhouding. Tegen den achterwand van het bekken, dat is tegen de heiligbeenswervelen aan, liggen drie spierbundels vlak bij elkander. De eene komt van de binnenvlakte van het eironde gat, en gaat zich met gescheiden bundels en pezen inplanten aan de onderste V-vormige uitsteeksels der staartwervelen (z. Pl. V fig. 7 *b*, *b*.).

Daar naast zit een spierbundel, die van de binnenvlakte van het darmbeen afkomt, op de hoogte der sleuf, die van voren door de eminentia ileo-pectinea begrensd wordt, en lange, dunne pezen afgeeft, welke zich vasthechten aan de onderste V-vormige uitsteeksels van den staart (z. Pl. V fig. 7, *c*, *c*, *c*.). Achterwaarts komen er van de staartwervelen zelve spierhoofden bij, die van de

dwarse uitsteeksels dier wervelen afkomen, en in pezen overgaan, die zich vasthechten aan de onderste V-vormige uitsteeksels tot aan den laatsten staartwervel toe.

Eene derde spier kom van den achtersten lendenwervel en van de voorvlakte van het heiligbeen met afzonderlijke spierhoofden, en gaat met lange en dunne pezen naar de dwarse uitsteeksels der staartwervelen (z. Pl. V fig. 7 *d*, *d*.).

Spieren der voorste extremiteit. De groote borstspier (z. Pl. II, *h*.) is zeer zwaar. Zij bedekt de geheele voorvlakte van de borstkas, komt van het sleutelbeen en van het borstbeen, en plant zich in aan de buitenste scherpe lijn van het opperarmbeen, tegen de inplanting aan den deltaspier.

Onder haar ligt de kleine borstspier (z. Pl. II, *i*.). Zij is breed, plat en driehoekig, komt van de geheele voorvlakte van het borstbeen, en plant zich in, niet zooals bij den mensch, aan het schouderblad, maar met eene breede pees aan het bovenste einde van het opperarmbeen.

De ondersleutelbeenspier komt van het handvat des borstbeens en van het kraakbeen der eerste rib, om zich aan het sleutelbeen in te planten.

De groote voorste gezaagde spier (M. serratus anticus major z. Pl. II, *w*.) bestaat uit twee gedeelten, een voorst en een achterst. Het achterste komt met vijf hoofden van de derde tot aan de achtste rib, en hecht zich vast aan den achtersten hoek des schouderblads. Het voorste gedeelte is van het achterste gescheiden, en komt met vijf spierhoofden van de dwarse uitsteeksels der drie achterste halswervelen en van de eerste en tweede rib. Het hecht zich vast aan den bovenrand des schouderblads, alwaar zijne inplanting grenst aan die van den opligter van den hoek des schouderblads. Eigentlijk zoude, zoo als elders door mij gezegd werd, de opligter van den hoek des schouderblads (M. levator anguli scapulae) bij de Viervoetige zoogdieren beschouwd moeten worden, als eene uitbreiding van de groote voorste gezaagde spier. Dat deze merkwaardige en sterke ontwikkeling van de groote voorste gezaagde spier, bij den Boom-kengoeroe in verband moet gebragt worden met de menigvuldige bewegingen der voorste extremiteit, tot het klimmen gevorderd, zal wel geen betoog behoeven. Bij eene wippende beweging van den schoudertop, zal het schouderblad er tevens door naar voren geschoven worden.

De deltaspier (z. Pl. III, *e*; Pl. II, *k*, *k*.) is vrij zwaar. Zij komt van het sleutelbeen, van het acromion en van de graat van het schouderblad, smelt achterwaarts gedeeltelijk ineen met den M. infra-spinatus (z. Pl. III, *f*.) en gaat zich inplanten aan de buitenste scherpe lijn van het opperarmbeen.

De M. infra-spinatus (Pl. III, *f.*) is eene zeer zware spier, die zich met eene krachtige pees hecht aan den buitensten of grooten knobbel van het opperarmbeen.

De teres minor is eene zeer kleine spier, die schier geheel door den M. infra spinatus overvleugeld wordt.

De teres major is daarentegen zeer zwaar (Pl. III, *g,*); hij komt als schouderbladshoofd der breede rugspier van het schouderblad, en verbreedt zich aanmerkelijk, om zich aan de binnenste scherpe lijn van het opperarmbeen vast te hechten. Van de onderschouderbladspier valt niet veel meer op te merken, dan dat zij eene zeer zware spier is.

Even gelijk bij zoovele andere Viervoetige zoogdieren, bestaat de tweehoofdige armspier slechts uit één hoofd, dat van den bovenrand van het schoudergewrigt afkomt, langs de voorvlakte van den bovenarm heengaat, en zich benedenwaarts in twee spierbundels splijt, welke vóór elkander zijn gelegen. De voorste of zwaarste hecht zich aan den knobbel van het spaakbeen; de achterste aan het bovenste uiteinde der voorvlakte van de ellepijp, alwaar hij met de binnenste armspier (M. brachialis internus) ineensmelt (z. Pl. II, *l, n.*).

De binnenste armspier komt van de buitenvlakte van het opperarmbeen, bestaat slechts uit een spierhoofd en hecht zich vast aan de ellepijp (z. Pl. III, *l.*).

De coraco-brachialis is eene zeer zwakke spier, die van boven ineensmelt met de pees der tweehoofdige armspier en zich inplant aan het bovenste gedeelte der binnenste scherpe lijn van het opperarmbeen.

De antagonist der beide vrij krachtige genoemde buigspieren van den voorarm is de driehoofdige of de strekspier van den voorarm. Haar lang hoofd is zeer zwaar en komt van den onder- of voorrand des schouderblads, tusschen de beide ronde spieren (z. Pl. III, *i.*). Het buitenste hoofd vult de geheele buitenvlakte van het opperarmbeen (z. Pl. III, *k.*). Het binnenste hoofd is veel zwakker en reikt bovenwaarts niet verder dan tot aan de inplanting der breede rugspier. De pees, waarin deze drie hoofden uitloopen, hecht zich vast aan het elleboguitsteeksel. Aldus wordt eene krachtige strekspier van den voorarm gevormd, waarvan de sterkte nog vermeerderd wordt door den bundel van de breede rugspier, welke, gelijk ik hierboven opgaf, langs het lange hoofd van de driehoofdige armspier heengaat.

Aan den voorarm is de ronde vooroverbuiger (M. pronator teres), eene zware spier, welke van den binnensten knokkel van het opperarmbeen afkomt, en zich in schuinse rigting aanmerkelijk verbreedt, om zich vast te hechten aan het spaakbeen (z. Pl. II, *p.*).

Naast den ronden vooroverbuiger ligt de spaakbeensbuigspier van de hand (M. flexor carpi radialis), die zich hecht aan het achterste uiteinde van het metacarpaalbeen van den duim (z. Pl. II, *r*, *r*.).

De lange handpalmspier (M. palmaris longus) is zeer zwak en verliest zich in de peesplaat van de handpalm (Pl. II, *s*, *s*.). Daarnaast ligt de ellepijpsbuigspier van de hand (M. flexor carpi ulnaris), die van den binnensten knokkel van het opperarmbeen komt, en zich over het erwtebeentje heen inplant aan het achterste uiteinde van het metacarpaalbeen van den pink of vijfden vinger (Pl. II, *t*, *t*.).

Ongeveer, zooals ik zulks vroeger voor Macropus en Sarcophilus opteekende, is er voor de buiging der vingers eene spier, zaamgesteld uit drie hoofden, de diepliggende en de oppervlakkige buigspier vervangende. Haar eene hoofd komt van den binnensten knokkel van het opperarmbeen, het tweede van het spaakbeen, het derde van de ellepijp. Deze gesteldheid herinnert eenigzins die van den solaeus bij den mensch. De drie hoofden eindigen in eene breede en platte pees, die zich in den handpalm in vijf smalle pezen splitst voor de vijf vingers, waaraan zij zich hechten. Zij zijn stevig en breed voor den tweeden, derden en vierden vinger, zeer tenger voor den duim en voor den pink, vooral voor den duim. Er is derhalve geene scheiding merkbaar in oppervlakkige en diepliggende buigspier, noch ook eenig bewijs van doorboring (z. Pl. II, *u*, *u*, *u*, *u*, *u*, *u*, *u*, *u*.). Ditzelfde werd voor vele jaren ook in Macropus door mij opgemerkt, terwijl ik in Sarcophilus nog eene scheiding opteekende in twee lagen, waarvan de buitenste in even zooveel strooken gesplitst is als er vingers zijn. Deze strooken splijten zich in tweeën om de pezen door te laten van de diepere laag, welke den flexor profundus voorstelt. Bij Sarcophilus is derhalve de gesteldheid der buigspieren eenigzins meer gecompliceerd en nadert zij tot hetgeen ik elders van den Leeuw opteekende.

Van het handpalmsgedeelte der pezen komen drie wormwijze spieren af (z. Pl. II, *v*, *v*, *v*).

De vierkante vooroverbuiger (M. pronator quadratus) is zeer zwak.

De lange achteroverbuiger (M. supinator longus) is smal en zwak. Hare lange en smalle pees hecht zich vast aan de rugvlakte van het spaakbeen, vlak boven het stijlvormig uitsteeksel (Pl. II, *q*.).

De strekspieren van de hand en van de vingers vertoonen de volgende verhouding. Er zijn eene lange en eene korte spaakbeensstrekspier (M. extensor carpi radialis longus et brevis). De smalle pees van de lange strekspier is

ingeplant aan het metacarpaalbeen van den wijsvinger (z. Pl. III, *n, n.*); de breede van de korte strekspier aan het metacarpaalbeen van den middelsten vinger (z. Pl. III, *o, o.*). De pezen dezer strekspieren worden oversneden door eene zware, breede strekspier van den duim, die van den tusschenbeensband afkomt en in eene pees overgaat, die zich aan den duim inplant (z. Pl. III, *p.*). Zij vervangt de korte strekspier en de lange afvoerende spier van den duim bij den mensch. Deze zelfde vereenvoudiging werd vroeger door mij opgeteekend bij Macropus.

Aan de ellepijpszijde ligt eene ellepijpsstrekspier der hand (M. extensor carpi ulnaris), die zich aan het metacarpaalbeen van den vijfden vinger vasthecht (z. Pl. III, *q.*).

Voor de uitstrekking der vingers dienen vooreerst drie oppervlakkig gelegen spieren, waarvan de eene, naast de ellepijpstrekspier van de hand gelegen, zich inplant aan den vijfden vinger (z. Pl. III, *r.*), de tweede aan den vierden vinger (Pl. III, *s,*), de derde aan den middelsten vinger (Pl. III, *t.*). Achter deze verborgen, liggen twee andere smallere strekspieren, waarvan de eene met eene smallere pees naar den wijsvinger gaat (Pl. III, *u.*), en de tweede eene pees afgeeft, die zich tusschen de achterste leden van den wijsvinger en van den duim in tweeën splitst, om zich met elken dezer vingers te verbinden (Pl. III, *v.*). Deze laatste vervangt derhalve zoowel de strekspier van den wijsvinger (M. indicator) als de lange strekspier van den duim. Bij de inplanting van al deze pezen valt op te merken, dat zij alle verlengsels afgeven ook aan de naastbij gelegen vingers, zoodat zij gecombineerd moeten werken op al de vingers.

Spieren der achterste ledematen. De spieren der achterste ledematen zijn zeer krachtig, hoewel toch niet zoo sterk ontwikkeld als ik ze vroeger bij Macropus vond. De groote bilspier (M. glutaeus maximus) is eene smalle spierstrook, die peesachtig afkomt van de dwarse uitsteeksels der heiligbeenswervelen, zich over de middelste bilspier heenslaat, en zich peesachtig hecht aan den grooten draaijer (Pl. III, *x.*).

De middelste bilspier (M. glutaeus medius) is eene veel zwaardere spier, die de geheele buitenvlakte van het darmbeen bedekt, van den kam van het darmbeen en van den rand van het heiligbeen afkomt, eene waaijerswijze gedaante heeft, en zich benedenwaarts versmalt, om zich peesachtig vast te hechten aan den grooten draaijer (Pl. III, *ij.*).

De kleine bilspier (M. glutaeus minimus) is eigentlijk maar eene dieper gelegen spierstrook van de middelste bilspier. Zij is er althans van boven geheel

mede ineengesmolten, maar hecht zich benedenwaarts met eene gescheiden pees vast aan den grooten draaijer.

Daaronder ligt eene spier, die den tensor fasciae latae schijnt te vervangen. Zij komt van den voorbovensten doorn van het darmbeen, van den onderrand en voor een deel van de buitenvlakte van het darmbeen, en gaat met een waaijerswijzen bundel langs de achtervlakte van de heupkom, en met een tweeden overlangschen bundel naar den grooten draaijer van het dijbeen, om zich aan zijne buitenvlakte en aan zijn scherpen kant vast te hechten.

De pyriformis, de gemelli, die de pees van den obturator internus tusschen zich nemen, hebben de gewone gesteldheid en planten zich in aan de achterste groeve tusschen de draaijers (fovea intertrochanterica posterior). Onder hen ligt eene zeer zware vierkante dijspier, die van den zitbeensknobbel en van den oprijzenden zitbeens-tak afkomt en zich vasthecht aan de buitenste scherpe lijn van het dijbeen.

Van de doornwijze uitsteeksels der staartwervelen komt eene zware langwerpige spier met drie bundels, die benedenwaarts in eene gemeenschappelijke pees uitloopen. De pees gaat, naast de groote buitenste dijspier (M. vastus externus) naar beneden, om zich gemeenschappelijk met haar vast te hechten aan de buitenste scherpe lijn van het dijbeen (Pl. III, *z.*).

De tweehoofdige dijspier (M. biceps femoris) bestaat slechts uit een spierhoofd, even gelijk ik dit vroeger bij Macropus en bij Sarcophilus opmerkte. Het komt van den zitbeensknobbel af, gaat langs de groote buitenste dijspier naar beneden, verbreedt zich alsdan waaijerswijze en hecht zich, langs den gastrocnemius heengaande, aan den scherpen kant van het scheenbeen en aan de zijvlakte van het kniegewrigt (Pl. III, *ee.*).

Even als bij Sarcophilus vond ik een semitendinosus en semimembranosus. De semitendinosus komt van den zitbeensknobbel, is veel zwakker dan de biceps, slaat zich heen langs de binnenvlakte van den gastrocnemius, en hecht zich vast aan de binnenvlakte van het bovenste uiteinde van het scheenbeen (Pl. III, *ff.*). De semimembranosus komt van den oprijzenden zitbeenstak, gaat langs de binnenvlakte der dij, onder de driehoofdige dijspier, naar de binnenvlakte van het bovenste uiteinde van het scheenbeen, om zich daar in te planten. Even gelijk ik dit vroeger van den Kengoeroe opteekende, gaat de gastrocnemius derhalve door tusschen de breede peesplaten, waarmede de buigspieren zich aan den schenkel vasthechten. Dat de hierdoor te weeg ge-

bragte drukking eene aanmerkelijke krachtvermeerdering levert voor de kuitspieren, laat zich gemakkelijk begrijpen.

De snijderspier (M. sartorius) is eene lange en smalle spier, die, zooals gewoonlijk bij de Zoogdieren, niet zooals bij den mensch naar beneden wegduikt, maar regt naar beneden weggaat, om zich te vereenigen met de pees van de vierhoofdige dijspier (M. quadriceps femoris) en zich vast te hechten aan de knieschijf. De snijderspier komt derhalve van den voorbovensten darmbeensdoorn af, en gaat langs de voorvlakte van de dij heen (Pl. II—III *aa.* Pl. IV *h, h.*).

De tengere dijspier (M. gracilis) is, zooals gewoonlijk bij de Zoogdieren plaats heeft, eene platte en breede spier, die van den geheelen nederdalenden schaambeenstak afkomt, grootendeels de binnenvlakte van de dij bedekt, en zich vasthecht aan het bovenste gedeelte der binnenvlakte van het scheenbeen (Pl. II, *cc.* Pl. IV, *n, n.*).

In den oorsprong van de kamspier (M. pectinaeus) merk ik dezelfde bijzonderheid op, welke ik vroeger van den Sarcophilus ursinus en van den Dasyurus macrourus opteekende. Zij komt namelijk met een bundel van den horizontalen tak des schaambeens en met een anderen van het bekkenuiteinde van het marsupiaalbeen. Beiden komen te zamen, om zich vast te hechten aan de binnenste scherpe lijn der dij, alwaar deze inplanting ineensmelt met die van den triceps (Pl. IV, *f, f.*). Het lange hoofd van den triceps komt evenzeer van het marsupiaalbeen af (z. Pl. II, *bb, cc.*). Zoo men nu daarbij in overweging neemt, hoe het marsupiaalbeen verbonden is met de buikspieren, blijkt dat het een hefboom wordt, die zoowel door de buikspieren als door de dijspieren, maar met een verschillend uitwerksel in beweging kan gebragt worden. Door de werking der dijspieren wordt het vermoedelijk vastgezet, opdat de buikspieren beter en met meer kracht op zijn bovenst uiteinde en op zijne beide randen zouden kunnen werken tot opligting des bekkens.

Dadelijk onder de snijderspier ligt het lange hoofd van de regte dijspier, dat iets lager dan de snijderspier afkomt van den voorbovensten doorn van het darmbeen, oorspronkelijk verre verwijderd is van het tweede hoofd der regte dijspier, maar er naderhand mede ineensmelt. Het tweede hoofd der regte dijspier is zeer zwaar, komt van den bovenrand der heupkom, gaat dan als eene regt opstaande spierbuik langs de voorvlakte der dij heen, en verbindt zich met den cruralis en met den vastus internus en externus tot vorming der pees van den quadriceps femoris (Pl. III, *bb, cc.* Pl. IV, *g, g*.*).

De driehoofdige dijspier heeft drie zware spierhoofden en plant zich daarmede in aan de binnenste scherpe lijn van het dijbeen, tot aan de achtervlakte van zijn binnensten knokkel (Pl. IV, *m*, *m*.). Het blijkt uit deze beschrijving, maar vooral uit de beschouwing der afbeeldingen, dat de spieren, zoowel van de heup- als van de dijstreek zeer krachtig ontwikkeld zijn, gelijk de behoefte der klimmende beweging zulks medebrengt.

In de spieren aan den schenkel ontdek ik zoowel eenige vereenvoudiging, uit de inrigting van den voet te verklaren, als eene eigenaardige complicatie, uit de noodwendigheid eener krachtige strekking van den voet af te leiden.

Aan de buitenvlakte van het scheenbeen ligt de voorste scheenbeenspier (M. tibialis anticus), waarvan de pees zich inplant aan het achterste uiteinde van het metatarsaalbeen van de beide binnenste teenen (Pl. II, *ff*. Pl. III, *hh*.).

Er naast, meer naar buiten, ligt de gemeenschappelijke lange strekspier der teenen; zij gaat in eene pees over, welke zich op den rug van den voet in tweeën splitst, om zich in te planten aan de beide buitenste teenen (Pl. III, *ii*, *ii*.).

Tusschen de voorste scheenbeenspier en de lange strekspier der teenen, is een klein spierbuikje met eene lange en smalle pees, welke zich benedenwaarts in tweeën splitst, om zich in te planten aan de beide binnenste ineengesmolten teenen. Deze spier vervangt derhalve de lange strekspier van den grooten teen, en strekt de beide binnenste teenen (Pl. III, *nn*, *nn*.).

Er zijn twee kuitbeenspieren, die beide op het kuitbeen liggen. De korte plant zich met eene smalle pees in aan het voorste uiteinde van het metatarsaalbeen van den buitensten teen (z. Pl. III, *kk*, *kk*.). De lange slaat zich om den buitensten enklaauw, gaat in schuinsche rigting over de ondervlakte van den voetwortel heen, en plant zich in aan het metatarsaalbeen van de beide binnenste ineengesmolten teenen (z. Pl. III, *ll*, *ll*.). Deze beide bedekken eene derde kuitbeenspier, die een zeer kort spierbuikje en eene zeer lange en smalle pees heeft, welke op den rug van den voet zich in tweeën splitst, om zich in te planten aan den middelsten en buitensten teen, waarvoor zij derhalve eene strekspier is (Pl. III, *mm*.). Het blijkt dus, dat er zwakke buigspieren van den voet, en zwakke strekspieren der teenen zijn. Daar tegenover staat de krachtige ontwikkeling der strekspieren van den voet, en der buigspieren van de teenen. De strekspier van den voet wordt zooals gewoonlijk door den gastrocnemius en solaeus gevormd. De gastrocnemius bestaat eigentlijk uit drie spierhoofden, even gelijk ik zulks bij Macropus opmerkte. De twee oppervlakkige komen van de achtervlakten der

beide knokkels van het dijbeen; zij verbreeden zich aan de achtervlakte van den schenkel en gaan te zamen in eene pees over, die langs de pees van den solaeus wegduikt, en zich daarmede overkruist, om zich in te planten aan het hielbeen. Er komt een derde hoofd bij, dat van den knop van het kuitbeen afkomt, smal en langwerpig is, en zich in de pees van het buitenste hoofd verliest. Er wordt dus door den gastrocnemius alleen reeds veel spierkracht aangewend tot strekking van den voet (z. Pl. VI. Fig. 1, *a, a, a,* Fig. 2, *a, a**.). Daarbij komt nu de solaeus, die van de achtervlakte van den buitensten knokkel van het dijbeen afkomt, zich aldaar vereenigt met het er aanwezig zaadbeentje en in eene pees overgaat, welke op zichzelve, zonder zich te verbinden met de pees van den gastrocnemius, zich over de ondervlakte van het hielbeen voortzet, en zich aldaar verbreedt, om over te gaan in eene peesplaat, welke zich verliest in de schede der buigspieren van den middelsten of zwaarsten teen. De solaeus werkt derhalve geheel op zichzelve, en is vooral spanspier voor de schede der buigspier, waarbij het hielbeen dan als eene katrol werkt (z. Pl. VI. Fig. 2, *b, b, b.*). Dit gescheiden blijven der pezen van den gastrocnemius en solaeus werd vroeger ook bij Macropus door mij opgemerkt.

Er is eene zware kniekuilspier (M. poplitaeus) (z. Pl. VI. Fig. 3. *a, a.*). Even als ik dit vroeger bij Macropus opmerkte, wordt de plaats van achterste scheenbeenspier, van lange buigspier van den grooten teen, en van lange gemeenschappelijke buigspier van de vier teenen vervangen door eene zware spier, die van den knop van het kuitbeen afkomt, langs de achtervlakte van den schenkel heengaat, en van weêrszijden korte naar achteren gaande spiervezelen ontvangt van kuitbeen en scheenbeen. Deze verbinden zich met de voorvlakte van den grooteren, middelsten bundel, ongeveer zooals dit in den solaeus bij den mensch plaats heeft, en alle te zamen gaan zij in eene pees over, die langs den binnensten enklaauw naar de voetzool gaat, en aldaar zich splitst in drie pezen: eene zware middelste voor den zwaren middelsten teen, en twee smallere zijdelingsche voor de overige teenen (z. Pl. VI. Fig. 3, *b, b, b, b.*). Van de voetzooloppervlakte der pees, voordat de splijting geschiedt, komen twee spierhoofden, die de plaats van korte buigspier vervangen, en met lange en smalle pezen zich vasthechten aan het achterste lid van den middelsten teen (z. Pl. VI. Fig. 3, *c, c.*). In de bifurcatie der pees voor den middelsten en buitensten teen komen van de pees der buigspier van de teenen drie wormswijze spieren, waarvan twee naar den middelsten, en eene naar den buitensten teen gaan. (z. Pl. VI. Fig. 3, *d, d.*). Er is derhalve eene krachtige spierverhouding voor

de buiging der teenen, waaraan zich tegen de ondervlakte van den metatarsus twee buigspieren (z. Pl. VI. Fig 3, *c, c.*) voegen voor den buitensten teen, voorts een aanvoeder voor den buitensten teen en tusschenbeenige spieren.

HERSENEN EN ZENUWSTELSEL.

De hersenen van den Dendrolagus bevestigen volkomen de voorstelling, welke R. Owen van de onvolmaaktheid der hersenen gaf bij de Marsupialiën, waaromtrent ik meer in het breede uitweidde in mijne ontleedkundige nasporingen van den Sarcophilus ursinus. De halfronden der groote hersenen zijn van boven geheel glad, zonder aanduiding van kronkels; het eenige wat men er in ziet (Pl. V, fig. 2.) zijn de indrukken der slagaders. Even als in de Vogels en in de laagste Zoogdiervormen zijn hunne voorkwabben zeer smal, ter naauwernood 0,022 breed; bij de achterkwabben verbreeden zij zich zoozeer, dat hunne dwarse doormeting aldaar wordt 0,034; in het midden wijken zij uiteen, en elk halfrond eindigt aldaar met eenen schuins naar buiten gaande rand; de lengte van elk halfrond, van de meest naar voren tot de meest naar achteren gaande punt, bedraagt 0,037. Door deze geringe lengte, en door het in het midden uiteenwijken der halfronden, liggen de vrij breede en betrekkelijk groote kleine hersenen geheel bloot (z. Pl. V, fig. 2 en 3.). Even als bij de Vogels en bij de lage vormen van Zoogdieren, bestaan de kleine hersenen grootstendeels uit den vermis en zeer kleine haemispheriën. De lengte van den vermis superior bedraagt 0,020; de breedte 0,025. De volle breedte der kleine hersenen aan de bovenvlakte bedraagt 0,029. Er blijven dus aan elke zijde slechts 2 m. m. over voor de halfronden. Aan den vermis superior is duidelijk herkenbaar de centrale kwab met de vleugels. Zijwaarts zijn daaraan toegevoegd breede, dwarse en evenwijdige kronkels. Die der halfronden zijn eenigzins meer ingewikkeld. Zijwaarts gaat elk halfrond der kleine hersenen in eene zijkwab, als ware het een flocculus over, welke bevat is in eenen daartoe bestemden kuil van het steenachtige gedeelte des slaapbeens (z. Pl. V fig. 1 en 2.).

Aan de grondvlakte der halfronden van de groote hersenen is ter naauwernood eenige scheiding zigtbaar in voorste en middelste kwab. De groeve van Sylvius is zeer ondiep, en alleenlijk van binnen eenigzins aangeduid (z. Pl. V, fig. 1.). Tegen den ondiepen bodem aan der groeve van Sylvius ligt de voorste zeefplaat, waarin ik de takken zag dringen der slagader van de groeve van Sylvius. Daartegen aan liggen de wortels der breede reukzenuwen, welke schier de geheele ondervlakte van de voorste kwabben vullen

(z. Pl. V, fig. 1.). Zij zijn aan den wortel breed 0,008, vlak bij den bol 0,006.

Langs de ondervlakte van elk halfrond gaat eene diepe en gebogen sleuf vrij symmetrisch van den rand des wortels der reukzenuw naar den achterrand des halfronds (z. Pl. V, fig. 1.). De brug van Varolius is zeer weinig gewelfd, en aan den achterrand alleen te onderscheiden door den oorsprong der N. N. abducentes. De vrij zware hersenschenkels liggen vlak bijeen; tusschen hen vindt men slechts eene zeer smalle middelste zeefplaat. Op de plaats, waar de diep liggende hersenslagaders zich verbinden met de inwendige carotiden, ontstaat eene vrij ingewikkelde wondervlecht. In plaats van twee corpora candicantia is er, zooals gewoonlijk bij de lagere Zoogdieren, slechts eene enkelvoudige kwab. Aan een duidelijken en smallen trechter zit verbonden eene vrij zware slijmklier. Het zeer zware en breede verlengde merg heeft, door de aanmerkelijke breedte van zijn voorst gedeelte, eene pyramiedvormige gedaante. Aan elke zijde van de middelste sleuf zit een zeer smal pyramiedvormig ligchaam, en daar naast een vrij zwaar olijfvormig ligchaam. Bij de verticale doorsnede is zeer opmerkelijk de geringe hoogte van elk halfrond, als gevolg van het volslagen gemis van kronkels van de derde orde van Foville, bij den aanmerkelijken omvang van hetgeen Foville noemt den zenuwstam der hersenen (tronçon nerveux z. Pl. VI fig. 4.). Van het eeltachtig ligchaam bestaat eigentlijk niets anders dan de knie (z. Pl. VI, fig. 4.). Hierdoor ligt de gezigtsbedding geheel onbedekt. Niet minder belangrijk is de groote omvang van de voorste commissuur, welke vlak onder het rudiment van eeltachtig ligchaam ligt. Dat deze bijzonderheden eene toenadering zijn tot de gesteldheid der hersenen in de Vogels, werd vroeger reeds door den Heer Owen gezegd en door mij in Sarcophilus bevestigd. De gezigtsbedding is sterk gewelfd; tusschen haar en de vierlingkwabben is eene diepe sleuf. De pijnappelklier is zeer klein (z. Pl. V, fig. 4.). De vierlingkwabben (C. C. quadrigemina z. Pl. V, fig. 4.) zijn sterk gewelfd; de voorste vooral zijn zeer zwaar. Het gestreepte ligchaam is zeer zwaar (z. Pl. V, fig. 5.).

Zoo men al deze bijzonderheden vergelijkt met diegene welke ik vroeger van den Sarcophilus opteekende, en met diegene welke Owen van de overige Marsupialiën opgaf, blijkt, dat de Dendrolagus daarmede overeenstemt, en derhalve de onvolmaaktheid van hersenen aanbiedt, welke de Marsupialiën kenmerkt en hen tot de eijerleggende dieren doet naderen, waarmede zij toch ook door hunne voortplantingswijze gedeeltelijk overeenkomen.

Van het overige zenuwstelsel heb ik niets bijzonders op te merken.

HART EN BLOEDVATEN.

Het hart is eivormig van gedaante; zijne spitse punt heeft geene de minste insnijding. Beide ooren hebben schier denzelfden omvang, hetgeen ik vroeger ook reeds bij Sarcophilus opmerkte, en dat ongetwijfeld een bewijs is van terugblijven op minder volkomen vorm. Er zijn, even als bij al de tot heden onderzochte Marsupialiën en bij eenige andere Zoogdieren, twee voorste holle aderen, waarvan de eene regts, de andere links van de basis van het hart gelegen is. Dat de linker de linker vena azygos opneemt, en dat het bestaan dezer beide voorste holle aderen een terugblijven is op een foetaal levenstijdperk van den mensch, heb ik, in verband met de voortreffelijke nasporingen van Rathke, John Marshall, Bardeleben en Sebastian, in mijn betoog over Sarcophilus aangetoond. De achterste holle ader is zeer wijd. Uit den boog der aorta komen slechts twee vaatstammen, eene ongenaamde slagader, die eene regter ondersleutelbeensslagader en twee carotiden afgeeft, en eene linker ondersleutelbeensslagader. In het maaksel van het hart ontmoet ik de verhouding welke aan de Marsupialiën eigen is. Er is geen spoor zigtbaar van eironde groeven; derhalve ook niet van klapvlies van Botallus, noch ook van klapvlies van Eustachius. Opmerkelijk kwam mij voor de geringe uitgebreidheid der regterstrook van het driepuntig klapvlies en de tengerheid en kortheid zijner peesachtige draden. De twee andere strooken daarentegen zijn zeer zwaar. In de valvulae mitralis en semilunares is geene afwijking van de gesteldheid der zoogdieren.

TONG, TONGBEEN, STROTTEHOOFD, LUCHTPIJP EN LONGEN.

De tong (z. Pl. VI, fig. 4.) heeft aan haren wortel drie in een driehoek geplaatste kuiltjes, in elk van welke zich eene papilla vallata bevindt. Over het midden der tong gaat naar voren eene vrij diepe sleuf heen, bezet met zeer spaarzame, puntig uitloopende kegelvormige tepels. Overigens is de geheele tong bezet met digt aaneengevoegde kegelvormige tepels, die vooral aan de randen der tong scherppuntig zijn. Aan weerszijden der sleuf puilen in vrij regelmatige reeks eenige papillae fungiformes uit. Het epithelium der tong is zeer dik.

Het grondstuk van het tongbeen (z. Pl. VI, fig. 5.) is een vierzijdig beenstukje, verbonden met de groote horens van het tongbeen, die in schuinse rigting naar achteren gaan, en zich vasthechten aan de oprijzende horens van het schildswijze kraakbeen. Evenwijdig met hen gaan de kleine horens, die

elk in twee met elkander gelede beenstukken verdeeld zijn. Vooreerst zit aan elke zijde een plat en breed beenstuk vereenigd met het voorste uiteinde van het grondstuk, en dit geleedt zich met een smal en langer beenstuk, dat zich aan de grondvlakte des schedels hecht.

Het schild des strottehoofds bestaat uit twee beenstukken, die in het midden eene kraakbeenige plaat tusschen zich hebben. De achterste plaat van het ringvormig kraakbeen is lang en ringvormig en van boven uitgesneden, waardoor zij tusschen zich en de bekervormige kraakbeenderen eene ruimte overlaat, met een vlies gevuld. De bekervormige kraakbeenderen zijn zeer zwaar; de stemspleet is wijd; de strotteklep kort en breed; de luchtpijpringen zijn van achteren afgebroken en met een vlies aangevuld.

De regterlong is door eene kleine, dwarse, niet doorgaande insnijding op onvolkomen wijze in twee kwabben verdeeld, waarbij achter- en benedenwaarts eene kleine, derde kwab komt. De linker long is geheel onverdeeld.

WERKTUIGEN TOT DE SPIJSVERTERING.

De speekselklieren zijn zeer sterk ontwikkeld. Vooral geldt zulks van de oorklier, die zich over den geheelen hals uitbreidt (z. Pl. I.). De onderkaakklier is evenzeer zwaar.

De lever is verdeeld in drie hoofdkwabben, waarvan de regter de kleinste is en achterwaarts eene kleine insnijding heeft; de middelste is grooter en heeft naar voren eene diepere insnijding, waarin de bodem der galblaas uitpuilt; de derde of linker is de grootste van allen. Aan de grondvlakte der lever bevindt zich een duidelijk gescheiden kwabje van Spigel, als ware het ingesloten in den buidel, welke het kleine net vormt. Met de bolle vlakte der middelste kwab is de kroonwijze band vereenigd. Er is geene aanduiding te vinden, noch van naveladeren, noch van aderlijke buis van Arantius. De poortader dringt tusschen de regter en middelste kwab in de lever en verspreidt zich daarin. De galblaas heeft eene langwerpig ronde gedaante en gaat, zonder ombuiging, in eene galblaasbuis over, die zeer lang is en zich in den twaalfvingerigen darm inmondt. Deze galblaasbuis verbindt zich reeds in de dwarse levergroef met de leverbuis, en vervangt aldus den ductus choledochus.

De maag heeft den vorm, aan Halmaturus en Macropus eigen, d. i. gelijkt zeer veel op een karteldarm. De dunne en lange slokdarm gaat over in eenen blinden zak, welke zich naar voren ombuigt en blind uitloopt. Er zijn drie strooken van overlangse spiervezelen, waardoor, even als in den karteldarm van den mensch, de rijen van cellen gevormd worden, welke aan de

maag der Kengoeroes eene zoo zonderlinge gedaante geven. Bij den poortier vormt de maag eene tweede krultrek, die gladder en minder in cellen verdeeld is, en met eene insnoering overgaat in den twaalfvingerigen darm. De geheele vorm der maag is derhalve gelijk te stellen met een spiraalswijs omgewonden karteldarm.

Tegen den achterwand der maag aan ligt de milt, die, even als in Macropus eene T-vormige gedaante heeft. De smalle en gekwabde alvleeschklier ligt tegen de milt aan. De dunne darmen zijn lang en sterk gekronkeld. Owen kent er eene lengte aan toe van 6 voet, en zegt dat de karteldarm 3 voet lang is. De blinde darm is, even als in Macropus, glad van oppervlakte, even zoo ook de karteldarm, zonder eenige verdeeling in cellen.

URINWEGEN EN VROUWELIJKE GESLACHTSDEELEN.

De nieren hebben hare gewone, langwerpig ronde gedaante, en eene gladde oppervlakte. Zij zijn derhalve niet in kwabben verdeeld. De er uit voortkomende pisleiders openen zich in den hals der urinblaas, met twee vlak bij elkander liggende monden, achter eene halvemaanswijze plooi van het slijmvlies. De bijnieren zijn zeer klein.

Wat de vrouwelijke voortplantingswerktuigen betreft, deze beantwoorden ten eenen male aan de beschrijving, welke ik bij Macropus daarvan voor vele jaren gaf. De middelste schede eindigt duidelijk in eenen blinden zak, zonder eenig spoor van de opening, welke Owen en Poelman * daarin vonden bij *Halmaturus* Bennettii. Later werd deze opening ook door mij gevonden bij *Halmaturus* Billardierii. Het blijkt derhalve, dat Macropus en Dendrolagus in dat punt verschillen van Halmaturus.

Overigens blijkt uit mijne geheele beschrijving, — zoo men haar gaat vergelijken met het bekende maaksel van Macropus, — dat er tusschen Macropus en Dendrolagus geen ander verschil bestaat, dan datgene wat in den vorm en in de proportie der ledematen gelegen is, waardoor de een geschikt wordt, om langs een horizontaal vlak zich met geweldige sprongen voort te bewegen, de ander om langs een vertikaal vlak op te klimmen, de een derhalve om op den grond, de ander om op de boomen te wonen. Ik durf mij vleijen, dat hetgeen ik tot nadere kennis van dezen belangrijken en slechts sedert weinige jaren bekenden diervorm bijdroeg, den dierkundigen niet geheel onwelkom zal wezen.

---

* *Bulletins de l'Académie royale de Belgique.* Tom. XVIII, pag. 599.

VERKLARING DER AFBEELDINGEN.

PLAAT I.

Geraamte van den *Dendrolagus inustus,* behoorende tot het museum van het genootschap *Natura Artis Magistra* te Amsterdam. Op de helft der natuurlijke grootte.

PLAAT II.

Spieren der onder-voorvlakte des ligchaams. Op de helft der natuurlijke grootte.

a, a. M. mylo-hyoideus.
b, b. M. sterno-hyoideus.
c, c. M. digastricus maxillae inferioris.
d, d. M. omo-hyoideus.
e, e. M. sterno-thyreoideus.
f, f, f, f. M. sterno-cleidomastoideus.
g, g. M. acromio-basilaris.
g, g*.* M. masseter.
h. M. pectoralis major.
i. M. pectoralis minor.
k, k. M. deltoideus.
l. M. biceps.
n. M. brachialis internus.
o. Bundel van den latissimus dorsi, welke zich vasthecht aan het elleboog-uitsteeksel.
p. M. pronator teres.
q. M. supinator longus.
r, r. M. radialis internus.
s, s. M. palmaris longus.
t, t. M. ulnaris internus.
u, u, u, u, u, u, u. M. flexor digitorum.
v, v, v. M. M. lumbricales.
w. M. serratus anticus major.
x, x. M. obliquus externus abdominis.
ÿ, ÿ, ÿ, ÿ, ÿ. M. rectus abdominis.
z, z. M. pyramidalis.
aa. M. sartorius.
bb. cc. M. pectinaeus.

dd. M. triceps-femoris.
ee. M. gracilis.
ff. M. tibialis anticus.
gg. M. gastrocnemius.

PLAAT III.

Voorstelling der spieren aan de rug- en zijvlakte des ligchaams. Op de helft der natuurlijke grootte.

a. M. temporalis.
b. M. masseter.
c. M. digastricus maxillae inferioris.
d, d, d. M. trapezius s. cucullaris.
e. M. deltoideus.
f. M. infraspinatus.
g. M. teres major.
h, h. M. latissimus dorsi. *h**. Bundel van de breede rugspier, welke langs de driehoofdige strekspier van den voorarm heengaat, en zich inplant aan den binnensten knokkel van het opperarmbeen en aan het ellebooguitsteeksel.
i. lang hoofd } van den triceps brachii.
k. buitenst hoofd }
l. M. brachialis internus.
m. M. biceps brachii.
n. M. extensor carpi radialis longus.
o. M. extensor carpi radialis brevis.
p. M. abductor longus en extensor brevis pollicis.
q. M. extensor carpi ulnaris.
r, r, s, s, t, t. Drie oppervlakkige strekspieren der vingers.
u, v. Diepliggende strekspieren der vingers.
w. M. obliquus externus abdominis.
x. M. glutaeus maximus.
y. M. glutaeus medius.
z. Spier van den staart afkomende en zich aan de dij inplantende.
aa. M. sartorius.
bb. Lang hoofd } van de regter dijespier (M. rectus femoris).
cc. Kort hoofd }
dd. M. vastus externus.
ee. M. flexor biceps femoris.
ff. M. semitendinosus.
gg. M. gastrocnemius.
hh. M. tibialis anticus.
ii, ii. M. extensor communis digitorum pedis.
kk, kk. M. peronaeus brevis.
ll, ll. M. peronaeus longus.
mm. M. peronaeus tertius.

PLAAT IV

geeft voorstelling van enkele dijspieren. Op de helft der natuurlijke grootte.

a, a, a, a. Voorste bundel } van de vierkante lendenspier.
b, b, b, b. Achterste bundel }
c, c, c, c. M. psoas minor. } Tusschen deze beiden door gaan de dijvaten.
d, d. M. psoas major. }
e, e. M. iliacus internus.
f, f. M. pectinaeus.
g, g.* De beide hoofden van M. rectus femoris.
h, h. Sartorius.
k. M. vastus externus.
l. M. vastus internus.
m, m. M. triceps femoris.
n, n. M. gracilis.

PLAAT V

is gewijd aan de spieren van den staart en aan de hersenen.

Fig. 1. Grondvlakte der hersenen.

Fig. 2. Bovenvlakte der hersenen.

Fig. 3. Buitenvlakte der doorsnede van de hersenen.

Fig. 4. Binnenvlakte der doorsnede van de hersenen.

Fig. 5. Horizontale doorsnede van het linker halfrond der groote hersenen. — *Fig.* 1—5 zijn ter natuurlijke grootte.

Fig. 6. Spieren aan de bovenvlakte van den staart.

a. Een klein gedeelte van den binnensten opligter van den staart.
b, b, b. Stroken van den buitensten opligter van den staart.
c. M. ischio-coccygeus.

Fig. 7. Spieren aan de ondervlakte van den staart.

a, a, a. M. ischio-coccygeus.
b, b. }
c, c, c. } Buigspieren van den staart.
d, d. }

Fig. 6 en 7 zijn op de helft der natuurlijke grootte.

PLAAT VI

geeft voorstelling van de spieren aan de achtervlakte van den schenkel, van de tong en van het strottehoofd.

Fig. 1. Eerste laag der spieren aan de achtervlakte van den schenkel.

a, a, a. M. gastrocnemius.
b, b. M. solaeus.

Fig. 2. Eerste en tweede laag der spieren aan de achtervlakte van den schenkel.

a. Doorgesneden bovenst uiteinde van den gastrocnemius, waarin zich *a** verliest het spierhoofd dat van het kuitbeen afkomt.

b, *b*, *b*. M. solaeus.

c. Spier, die de plaats vervangt van achterste scheenbeenspier, van lange buigspier van de groote teenen, en van lange gemeenschappelijke buigspier der teenen.

d, *d*. M. poplitaeus.

Fig. 3. Derde laag der spieren van de achtervlakte van den schenkel.

a, *a*. M. poplitaeus.

b, *b*, *b*, *b*. Gemeenschappelijke buigspier der teenen.

c, *c*. Twee smalle spierbundels, die van de pees der gemeenschappelijke spier afkomen en aldaar de plaats van korte buigspieren vervangen.

d, *d*. Wormwijze spieren.

e, *e*. Buigspieren van den buitensten teen.

Fig. 4. Tong, met de eigenaardige sleuf, waarin zich de kegelvormige tepels bevinden.

Fig. 5. Strottehoofd en tongbeen, vooral opdat blijke hoe, volgens bl. 31, het schild des strottehoofds gevormd wordt door twee beenige platen, verbonden met een kraakbeen, hetwelk uit dat van het schild'swijze en van het ring'swijze kraakbeen is zaâmgesmolten.

Fig. 1, 2 en 3 zijn op de helft der natuurlijke grootte.

Fig. 4 en 5 stellen de natuurlijke grootte voor.

OVER DE

DRAAIJENDE BEWEGING

VAN EEN

LIGCHAAM OM EEN VAST PUNT,

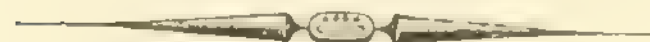
EN DE

BEWEGING DER AARDE OM HAAR ZWAARTEPUNT,

DOOR

G. F. W. BAEHR.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.



AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1857.

OVER DE

DRAAIJENDE BEWEGING

VAN EEN

LIGCHAAM OM EEN VAST PUNT,

EN DE

BEWEGING DER AARDE OM HAAR ZWAARTEPUNT,

DOOR

G. F. W. BAEHR.

Het verdient opmerking, dat men de drie vergelijkingen, welke den stand in de ruimte bepalen van een ligchaam, dat om een vast punt draait, niet langs den synthetischen weg, althans onmiddellijk uit de leer van de zamenstelling en ontbinding der draaijende bewegingen, afgeleid vindt. Poisson geeft bij herhaling van een van die vergelijkingen eene meetkunstige verklaring, doch doet niet opmerken, dat alle drie, zonder eenige analysis, uit de beschouwing der figuur zeer gemakkelijk gevonden kunnen worden.

Vooraf zij gezegd, om de te vinden formulen met die van Poisson te doen overeenstemmen, dat eene positieve rotatie zulk eene is, die plaats heeft van de regter naar de linker hand, als men zich met de voeten in den oorsprong, en met het hoofd in de rigting stelt van de lijn, die bij den oorsprong beginnende als rotatie-as wordt aangewezen; en dat, even als bij hem, een stelsel van drie onderling loodregte assen, $0x$, $0y$, $0z$, door opvolgende letters aangeduid, altijd zoo genomen moet worden, dat door eene positieve rotatie om de eerste, tweede of derde as de tweede, derde of eerste op de derde, eerste of tweede komt, als de doorgeloopen hoek een regten bedraagt.

OVER DE

DRAAIJENDE BEWEGING

VAN EEN

LIGCHAAM OM EEN VAST PUNT,

EN DE

BEWEGING DER AARDE OM HAAR ZWAARTEPUNT,

DOOR

G. F. W. BAEHR.

Het verdient opmerking, dat men de drie vergelijkingen, welke den stand in de ruimte bepalen van een ligchaam, dat om een vast punt draait, niet langs den synthetischen weg, althans onmiddellijk uit de leer van de zamenstelling en ontbinding der draaijende bewegingen, afgeleid vindt. POISSON geeft bij herhaling van een van die vergelijkingen eene meetkunstige verklaring, doch doet niet opmerken, dat alle drie, zonder eenige analysis, uit de beschouwing der figuur zeer gemakkelijk gevonden kunnen worden.

Vooraf zij gezegd, om de te vinden formulen met die van POISSON te doen overeenstemmen, dat eene positieve rotatie zulk eene is, die plaats heeft van de regter naar de linker hand, als men zich met de voeten in den oorsprong, en met het hoofd in de rigting stelt van de lijn, die bij den oorsprong beginnende als rotatie-as wordt aangewezen; en dat, even als bij hem, een stelsel van drie onderling loodregte assen, $0x$, $0y$, $0z$, door opvolgende letters aangeduid, altijd zoo genomen moet worden, dat door eene positieve rotatie om de eerste, tweede of derde as de tweede, derde of eerste op de derde, eerste of tweede komt, als de doorgeloopen hoek een regten bedraagt.

Is dan het ligchaam onwrikbaar verbonden met een beweeglijk assenstelsel, 0ξ, 0η, 0ζ, dat met een vast assenstelsel, $0x, 0y, 0z$, het draaipunt 0 tot gemeenschappelijken oorsprong heeft, zoo wordt zijn stand in de ruimte bepaald door: 1°. den hoek ψ, dien de doorsnede der $\xi\eta$ en xy vlakken met de as $+0x$ maakt; 2°. de helling θ van deze vlakken of den hoek tusschen $+0\zeta$ en $+0z$; en 3°. den hoek φ, dien $+0\xi$ maakt met gezegde doorsnede. Uit de beschouwing der figuur blijkt, dat, als ψ, θ en φ op zeker oogenblik bekend zijn, het stelsel, 0ξ, 0η, 0ζ, in den vereischten stand komt door het oorspronkelijk met het vaste stelsel te doen overeenkomen, zoodanig dat $+0\xi$ op $+0x$, $+0\eta$ op $+0y$ valle, waardoor dan van zelf $+0\zeta$ op $+0z$ komt, en daarna het beweeglijk stelsel achtereenvolgens te geven: 1°. eene rotatie $-\psi$ om $+0z$; 2°. eene rotatie $-\theta$ om $+0\xi$, die op dit oogenblik nog in het xy vlak ligt; en 3°. eene rotatie $+\varphi$ om $+0\zeta$.

Als dus de opgenoemde hoeken, naar de rigting van hunne telling, met hunne differentialen aangroeijen, dan heeft er plaats:

1°. eene rotatie $-d\psi$ om $+0z$. Daar θ de hoek is tusschen $+0z$ en $+0\zeta$, zoo herleidt zich die rotatie tot twee andere:

$$-d\psi \, Cos.\,\theta \text{ om } +0\zeta$$
$$-d\psi \, Sin.\,\theta \text{ '' het verlengde der projectie van } +0z \text{ op het } \xi\eta \text{ vlak;}$$

de hoeken tusschen deze verlengde projectie en $+0\xi$, en $+0\eta$ zijn $90°+\varphi$ en $180°+\varphi$, zoodat de laatste rotatie wederom herleid wordt tot twee andere:

$$-d\psi \, Sin.\,\theta \, Cos.\,(90°+\varphi) = Sin.\,\theta \, Sin.\,\varphi \, d\psi \text{ om } +0\xi,$$
$$-d\psi \, Sin.\,\theta \, Cos.\,(180°+\varphi) = Sin.\,\theta \, Cos.\,\varphi \, d\psi \text{ '' } +0\eta;$$

2°. eene rotatie $-d\theta$ om de doorsnede der $\xi\eta$ en xy vlakken, die met 0ξ en 0η de hoeken $-\varphi$ en $-(\varphi+90°)$ maakt, zoodat zij zich herleidt tot twee andere:

$$-d\theta \, Cos.\,\varphi \text{ om } +0\xi,$$
$$-d\theta \, Sin.\,\varphi \text{ '' } +0\eta;$$

3°. eene rotatie $d\varphi$ om $+0\zeta$.

In den tijd dt echter, waarin de hoeken met hunne differentialen aangroeijen, zijn ook de rotatieën om de assen, 0ξ, 0η, 0ζ, als p, q, r, de hoeksnelheden om deze assen voorstellen:

$$p\,dt, \quad q\,dt, \quad r\,dt;$$

zoodat men door de rotatieën, die om dezelfde as plaats hebben, bij elkander

te tellen en de som aan hare overeenkomstige uitdrukkingen gelijk te stellen, de bekende vergelijkingen:

$$p\,d\,t = Sin.\,\theta\;Sin.\,\varphi\;d\,\psi - Cos.\,\varphi\;d\,\theta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$q\,d\,t = Sin.\,\theta\;Cos.\,\varphi\;d\,\psi - Sin.\,\varphi\;d\,\theta,$$
$$r\,d\,t = d\,\varphi - Cos.\,\theta\;d\,\psi,$$

verkrijgt.

2.

Ook de drie andere vergelijkingen, welke nog vereischt worden om de zes grootheden, ψ, θ, φ, p, q, r, in functie van den tijd t te bepalen, kunnen op eene meer eenvoudige wijze dan gewoonlijk verkregen worden.

Volgens eene algemeene dynamische eigenschap, die onmiddellijk voortvloeit uit het grondbeginsel van D'ALEMBERT, zijn, wanneer op eenig zamenstel geene uitwendige krachten werken, de momenten der hoeveelheden van beweging onveranderlijk voor elk willekeurig regthoekig assenstelsel, dat vast is in de ruimte. Die momenten zijn wel verschillend, naarmate de rigting der vaste assen anders genomen wordt, maar hun resulteerend moment, dat onafhankelijk is van die rigting, is eene volstrekte standvastige grootheid, en de rigting van zijne as is onveranderlijk.

Neemt men deze vaste rigting voor de as $+ 0z$, dan kan men gemakkelijk de momenten der hoeveelheden van beweging berekenen ten opzigte van de drie onderling loodregte rigtingen, waarmede op zeker oogenblik der beweging het aan het ligchaam verbonden beweeglijk stelsel te zamenvalt. Zij namelijk k de grootte van het standvastige resulteerende moment, dan herleidt zich dit tot twee andere:

$k\;Cos.\,\theta$ om de vaste lijn in de rigting der $+ 0\zeta$ as,

$k\;Sin.\,\theta$ " " " " " " " " verlengde projectie van $+ 0z$ op het $\xi\eta$ vlak;

en dit laatste wordt wederom herleid tot twee andere:

$k\;Sin.\,\theta\;Cos.\,(90^\circ + \varphi) = - k\;Sin.\,\theta\;Sin.\,\varphi$ om de vaste lijn in de rigting van $+ 0\xi$,

$k\;Sin.\,\theta\;Cos.\,(180^\circ + \varphi) = - k\;Sin.\,\theta\;Cos.\,\varphi$ " " " " " " " " $+ 0\eta$.

Laten nu op dit oogenblik p, q, r de hoeksnelheden zijn om 0ξ, 0η, 0η, dus ook om de vaste lijnen in die rigtingen; en stel, dat $l\xi$, $l\eta$, $l\zeta$ de loodlijnen zijn, die uit eenig punt (ξ, η, ζ) op deze assen worden getrokken, dan is de snelheid van dit punt de resulteerende van drie andere: $p \times l\xi$,

$q \times l\eta$, $r \times l\zeta$, die respectievelijk evenwijdig zijn aan de $\eta\zeta$, $\xi\zeta$ en $\xi\eta$ vlakken. De cosinussen der hoeken, die hare rigtingen met de assen, 0ξ, 0η, 0ζ, maken, zijn:

$$\text{voor } p \times l\xi: \quad 0, \quad -\frac{\zeta}{l\xi}, \quad \frac{\eta}{l\xi},$$

$$\text{,, } q \times l\eta: \quad \frac{\zeta}{l\eta}, \quad 0, \quad -\frac{\xi}{l\eta},$$

$$\text{,, } r \times l\zeta: \quad -\frac{\eta}{l\xi}, \quad \frac{\xi}{l\zeta}, \quad 0;$$

de snelheden, evenwijdig aan de vaste rigtingen, zijn dus:

$$q \times l\eta \times \frac{\zeta}{l\eta} + r \times l\zeta \times -\frac{\eta}{l\xi} = q\zeta - r\eta,$$

$$p \times l\xi \times -\frac{\zeta}{l\xi} + r \times l\zeta \times \frac{\xi}{l\zeta} = r\xi - p\zeta,$$

$$p \times l\xi \times \frac{\eta}{l\xi} + q \times l\eta \times -\frac{\xi}{l\eta} = p\eta - q\xi$$

door deze snelheden met de massa dm van het punt te vermenigvuldigen en de producten, of hoeveelheden van beweging, als krachten te behandelen, vindt men voor de momenten van die hoeveelheden van beweging:

$$\int \{ \eta (p\eta - q\xi) - \zeta (r\xi - p\zeta) \} \, dm.,$$

$$\int \{ \zeta (q\zeta - r\eta) - \xi (p\eta - q\xi) \} \, dm.,$$

$$\int \{ \xi (r\xi - p\zeta) - \eta (q\zeta - r\eta) \} \, dm.;$$

waarin de integralen over het geheele ligchaam moeten uitgebreid worden. Zijn dus 0ξ, 0η, 0ζ hoofdassen, en stelt men, als naar gewoonte,

$$\int (\eta^2 + \zeta^2)\, dm = A, \qquad \int (\zeta^2 + \xi^2)\, dm = B, \qquad \int (\xi^2 + \eta^2)\, dm = C,$$

dan worden die momenten respectievelijk:

$$A p, \qquad B q, \qquad C z,$$

en verkrijgt men door dezelve aan hare vroeger gevondene waarden gelijk te stellen:

$$A p = -k \, Sin.\theta \, Sin.\varphi, \qquad B q = -k \, Sin.\theta \, Cos.\varphi, \qquad C r = k \, Cos.\theta; \quad \ldots \quad (2)$$

welke vergelijkingen nu tijdens den geheelen duur der beweging gelden, omdat bij de voorgaande beschouwing de vaste rigtingen willekeurig zijn genomen, en $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ elk oogenblik met zulk een assenstelsel te zamen vallen.

Uit de vergelijkingen (2) heeft men nog:

$$k^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

3.

Door uit de vergelijkingen (1) en (2) de hoeken, θ, φ en ψ, te elimineeren, moet men vergelijkingen verkrijgen, die p, q, r in functie van t bepalen.

Elimineert men daartoe eerst uit (1) den hoek ψ, dan heeft men:

$$p \, Cos.\theta \, dt = Sin.\theta \, Sin.\varphi \, (d\varphi - r\,dt) - Cos.\theta \, Cos.\varphi \, d\theta,$$
$$q \, Cos.\theta \, dt = Sin.\theta \, Cos.\varphi \, (d\varphi - r\,dt) + Cos.\theta \, Sin.\varphi \, d\theta;$$

en hieruit met behulp van (2) $Cos.\theta$, $Sin.\theta \, Sin.\varphi$, $Sin.\theta \, Cos.\varphi$ verdrijvende:

$$(C - A) p r dt = - A p d\varphi - k \, Cos.\theta \, Cos.\varphi \, d\theta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$
$$(C - B) q r dt = - B q d\varphi + k \, Cos.\theta \, Sin.\varphi \, d\theta.$$

Differentieert men de twee eerste (2), dan komt er:

$$- A dp = - B q d\varphi + k \, Cos.\theta \, Sin.\varphi \, d\theta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$
$$B dq = - A p d\varphi - k \, Cos.\theta \, Cos.\varphi \, d\theta;$$

elimineert men nog ψ uit de twee eerste (1), dan heeft men:

$$(q \, Sin.\varphi - p \, Cos.\varphi) \, dt = d\theta,$$

en dit in de differentiaal der derde van (2), namelijk in

$$C \, dr = - k \, Sin.\theta \, d\theta,$$

overbrengende:

$$C \, dr = - k \, \{q \, Sin.\theta \, Sin.\varphi - p \, Sin.\theta \, Cos.\varphi\} \, dt;$$

stelt men hierin ook voor $Sin.\theta \, Sin.\varphi$ en $Sin.\theta \, Cos.\varphi$ de waarden uit (2), en voorts voor de tweede leden der vergelijkingen (a) de waarden, zoo als die uit (b) volgen, dan verkrijgt men, voor het geval dat er geene uitwendige krachten werken, de vergelijkingen:

$$A \frac{dp}{dt} + q r (C - B) = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

$$B \frac{dq}{dt} + r p (A - C) = 0,$$

$$C \frac{dr}{dt} + p q (B - A) = 0.$$

4.

Als er uitwendige krachten werken, dan kunnen de algemeene vergelijkingen, die uit het grondbeginsel van d'Alembert voortvloeijen, ook op de volgende wijze in woorden overgebragt worden: voor elke as van een vast assenstelsel is het differentiaal-quotient, ten opzigte van den tijd, van de som der momenten van de hoeveelheden van beweging gelijk aan het koppel, dat loodregt op die as komt, als men de versnellende koppels herleidt tot drie andere, welke loodregt zijn op de vaste assen.

Indien nu, zoo als gewoonlijk, a, a', a'' de cosinussen voorstellen van de hoeken, die de hoofdas 0ξ met de vaste assen, $0x$, $0y$, $0z$, maakt, terwijl die grootheden voor 0η door b, b', b'' en voor 0ζ door c, c', c'' voorgesteld worden, en P, Q, R de versnellende koppels aanduiden, die tijdens de beweging loodregt op de hoofdassen, 0ξ, 0η, 0ζ, werken, dan is, volgens de theorie van de zamenstelling en ontbinding der momenten of koppels, en dewijl de momenten der hoeveelheden van beweging ten opzigte van drie vaste assen in de rigtingen der hoofdassen altijd Ap, Bq, Cr zijn, de som der gezegde momenten

ten opzigte van de vaste as $0x = Apa + Bqb + Crc$,
" " " " " " $0y = Apa' + Bqb' + Crc'$,
" " " " " " $0z = Apa'' + Bqb'' + Crc''$,

terwijl de drie versnellende koppels, P, Q, R, herleid worden tot

een koppel loodregt op $0x = a\,P + b\,Q + c\,R$,
" " " " $0y = a'\,P + b'\,Q + c'\,R$,
" " " " $0z = a''P + b''Q + c''R$.

Men heeft dus, volgens gezegd beginsel, onmiddellijk de volgende vergelijkingen:

$$Aa\frac{dp}{dt} + Bb\frac{dq}{dt} + Cc\frac{dr}{dt} + Ap\frac{da}{dt} + Bq\frac{db}{dt} + Cr\frac{dc}{dt} = a\,P + b\,Q + c\,R,$$

$$Aa'\frac{dp}{dt} + Bb'\frac{dq}{dt} + Cc'\frac{dr}{dt} + Ap\frac{da'}{dt} + Bq\frac{db'}{dt} + Cr\frac{dc'}{dt} = a'\,P + b'\,Q + c'\,R,$$

$$Aa''\frac{dp}{dt} + Bb''\frac{dq}{dt} + Cc''\frac{dr}{dt} + Ap\frac{da''}{dt} + Bq\frac{db''}{dt} + Cr\frac{dc''}{dt} = a''P + b''Q + c''R.$$

waaruit, als men zich de bekende betrekkingen

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \quad , \quad ab + a'b' + a''b'' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \quad , \quad ac + a'c' + a''c'' = 0$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \quad , \quad bc + b'c' + b''c'' = 0$$

herinnert, door dezelve in rangorde met a, a', a'', met b, b', b'' en met c, c', c' te vermenigvuldigen en de som der producten te nemen, volgt:

$$A\frac{dp}{dt} + Bq\left(a\frac{db}{dt} + a'\frac{db'}{dt} + a''\frac{db''}{dt}\right) + Cr\left(a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt}\right) = P, \; . \; . \quad (d)$$

$$B\frac{dq}{dt} + Ap\left(b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt}\right) + Cr\left(b\frac{dc}{dt} + b'\frac{dc'}{dt} + b''\frac{dc''}{dt}\right) = Q,$$

$$C\frac{dr}{dt} + Ap\left(c\frac{da}{dt} + c'\frac{da'}{dt} + c''\frac{da''}{dt}\right) + Bq\left(c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt}\right) = R.$$

De grootheden, a, a', a'', ... moeten bepaalde functiën zijn van de drie hoeken, φ, θ, ψ, omdat deze alleen voldoende zijn om den stand van het beweeglijk assenstelsel vast te stellen. Die functiën zullen identiek aan de betrekkingen (c) voldoen, dewijl anders φ, ψ en θ niet onderling onafhankelijk zouden zijn. Men moet dus met behulp van de negen vergelijkingen, die a, a', a'', ... in functie van φ, ψ en θ bepalen, en van de drie vergelijkingen (1), vooreerst de hoeken, φ, ψ en θ, kunnen elimineeren, en daarna a, a', a'', ... zelve in functie van p, q, r kunnen uitdrukken, om alzoo die grootheden uit de vergelijkingen (d) te verdrijven.

Begint men de toepassing van deze algemeene beschouwing met de eenvoudigste functiën, dan bevindt men, dat de beoogde eind-eliminatie zeer gemakkelijk afloopt. Men vindt namelijk uit de figuur bijna onmiddellijk

$$a'' = -\,Sin.\,\theta\, Sin.\,\varphi \quad , \quad b'' = -\,Sin.\,\theta\, Cos.\,\varphi \quad , \quad c'' = Cos.\,\theta,$$

en elimineert nu uit de vergelijkingen (1) den hoek ψ, niet door de eerste met $Cos.\ \varphi$, de tweede met $Sin.\ \varphi$ te vermenigvuldigen, en het verschil der producten te nemen, hetgeen voldoende zou zijn, maar door dat verschil te nemen, nadat men de eerste met b'' en de tweede met a'' heeft vermenigvuldigd; men heeft dan aanstonds:

$$a''q - b''p = -\,Sin.\,\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{dc''}{dt},$$

waarin men klaarblijkelijk a'', b'', c'' met a', b', c' en met a, b, c mag verwisselen. Om zulks in te zien, behoeft men slechts de namen der vaste assen

te verwisselen, zoodat $0x$, $0y$, $0z$ in de rigtingen komen, die nu $0z$, $0x$, $0y$ hebben, waardoor a', b', c' de hoeken worden, die de derde vaste as met de hoofdassen maakt, terwijl deze hoeken a, b, c worden, als men de $0x$ as neemt in de rigting, die nu $0y$ heeft, en waarbij dan $0y$ en $0z$ in de rigtingen komen, die nu $0z$ en $0y$ hebben.

Men heeft dus onmiddellijk de drie betrekkingen:

$$a\,q - b\,p = \frac{dc}{dt}, \quad a'\,q - b'\,p = \frac{dc'}{dt}, \quad a''\,q - b''\,p = \frac{dc''}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (e)$$

Laat men de benamingen der vaste assen onveranderd, maar verwisselt men die der beweeglijke, zoodat men de rigting, die nu 0η heeft, voor die van 0ξ neemt, waardoor 0ζ en 0ξ overgaan in 0η en 0ζ, dan worden b, b', b'' de cosinussen der hoeken, die 0ξ met de vaste assen maakt, terwijl die hoeken voor de assen 0η en 0ζ worden c, c', c'' en a, a', a''. Men moet dan in de laatst gevondene vergelijkingen a in b en p in q; b in c en q in r; en eindelijk c in a en r in p veranderen, waardoor men verkrijgt:

$$b\,r - c\,q = \frac{da}{dt}, \quad b'\,r - c'\,q = \frac{da'}{dt}, \quad b''\,r - c''\,q = \frac{da''}{dt}; \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

door eene tweede *circulaire substitutie* vindt men eveneens:

$$c\,p - a\,r = \frac{db}{dt}, \quad c'\,p - a'\,r = \frac{db'}{dt}, \quad c''\,p - a''\,r = \frac{db''}{dt}; \quad \ldots\ldots \quad (g)$$

Vermenigvuldigt men nu de vergelijkingen (g) in rangorde met a, a', a'', en neemt men, lettende op de betrekkingen (c), de som der producten; handelt men evenzoo met de vergelijkingen (e), dan vindt men, dat de tweede en derde termen in de eerste der vergelijkingen (d) vervangen kunnen worden door $q\,r\,(\mathrm{C}-\mathrm{B})$, terwijl men, op eene overeenkomstige wijze, voor die termen in de beide andere vergelijkingen (d) $r\,p\,(\mathrm{A}-\mathrm{C})$, $p\,q\,(\mathrm{B}-\mathrm{A})$ vindt, zoodat dan die vergelijkingen worden:

$$\mathrm{A}\,\frac{dp}{dt} + q\,r\,(\mathrm{C}-\mathrm{B}) = \mathrm{P}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\mathrm{B}\,\frac{dq}{dt} + r\,p\,(\mathrm{A}-\mathrm{C}) = \mathrm{Q},$$

$$\mathrm{C}\,\frac{dr}{dt} + p\,q\,(\mathrm{B}-\mathrm{A}) = \mathrm{R}.$$

5.

In de vergelijkingen (4) kan men altijd onderstellen:

$$A > B > C,$$

zoodat B, wat de grootte betreft, het middelste der momenten van traagheid is.

Stelt men dan in die vergelijkingen:

$$p = \rho \, Cos.\lambda \quad , \quad q = \rho \, Cos.\mu \quad , \quad r = \rho \, Cos.\nu, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

waarin ρ de positieve tweedemagtswortel uit de som der tweedemagten van p, q, r voorstelt, en waaruit volgt:

$$Cos.^2 \lambda + Cos.^2 \mu + Cos.^2 \nu = 1,$$

$$Sin.\lambda \, Cos.\lambda \, d\lambda + Sin.\mu \, Cos.\mu \, d\mu + Sin.\nu \, Cos.\nu \, d\nu = 0,$$

dan worden zij:

$$- A\rho \, Sin.\lambda \frac{d\lambda}{dt} + A \, Cos.\lambda \frac{d\rho}{dt} + (C - B)\rho^2 \, Cos.\mu \, Cos.\nu = 0, \quad . \; . \; . \; (b)$$

$$- B\rho \, Sin.\mu \frac{d\mu}{dt} + B \, Cos.\mu \frac{d\rho}{dt} + (A - C)\rho^2 \, Cos.\lambda \, Cos.\nu = 0,$$

$$- C\rho \, Sin.\nu \frac{d\nu}{dt} + C \, Cos.\nu \frac{d\rho}{dt} + (B - A)\rho^2 \, Cos.\lambda \, Cos.\mu = 0;$$

door deze in rangorde met $B C \, Cos.\lambda, C A \, Cos.\mu, A B \, Cos.\nu$ te vermenigvuldigen, en de som der producten te nemen, verkrijgt men:

$$A B C \, d\rho + \{BC(C - B) + CA(A - C) + AB(B - A)\}\rho^2 \, Cos.\lambda \, Cos.\mu \, Cos.\nu = 0,$$

of, kortheidshalven

$$\frac{A B C}{(A - B)(A - C)(B - C)} = M$$

stellende, zoodat M eene positieve grootheid is:

$$\rho^2 \, Cos.\lambda \, Cos.\mu \, Cos.\nu = M \frac{d\rho}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

Hierdoor heeft men, de 1e vergelijking (b) met $\rho \, Cos.\lambda$ vermenigvuldigende:

$$- A\rho^2 \, Sin.\lambda \, Cos.\lambda . \frac{d\lambda}{dt} + A \, Cos.^2 \lambda . \rho \frac{d\rho}{dt} + M(C - B)\frac{\rho d\rho}{dt} = 0,$$

of

$$A \, d.\rho^2 \, Cos.^2 \lambda = M(B - C) \, d.\rho^2,$$

terwijl men, door de tweede (b) met $\rho \, Cos.\mu$, en de derde met $\rho \, Cos.\nu$ te vermenigvuldigen, evenzoo vindt:

$$B\, d.\rho^2\, Cos.\mu = -\, M\,(A - C)\, d.\rho^2,$$
$$C\, d.\rho^2\, Cos.\nu = \quad M\,(A - B)\, d.\rho^2;$$

door de drie laatste vergelijkingen te integreeren heeft men dus:

$$p = \rho\, Cos.\lambda = \sqrt{\frac{M\,(B - C)}{A}} \,.\, \sqrt{(\rho^2 - a^2)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

$$q = \rho\, Cos.\mu = \sqrt{\frac{M\,(A - C)}{B}} \,.\, \sqrt{(b^2 - \rho^2)},$$

$$r = \rho\, Cos.\nu = \sqrt{\frac{M\,(A - B)}{C}} \,.\, \sqrt{(\rho^2 - c^2)};$$

waarin a^2, b^2, c^2 de constanten der integratie zijn, die echter niet alle drie willekeurig genomen kunnen worden, dewijl zij voldoen moeten aan de betrekking:

$$\frac{B - C}{A}\, a^2 - \frac{A - C}{B}\, b^2 + \frac{A - B}{C}\, c^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

welke men verkrijgt door de som der tweede magten van (d) te nemen, waardoor tevens in het oog valt, dat

$$\frac{M\,(B - C)}{A} - \frac{M\,(A - C)}{B} + \frac{M\,(A - B)}{C} = 1$$

is.

Stelt men, ten einde de constanten nader te beoordeelen, de aanvankelijke hoeksnelheden, aan welke alle mogelijke willekeurige waarden toegekend kunnen worden, door p_0, q_0, r_0 voor, waaruit dan de aanvankelijke waarde ρ_0 van ρ volgt, zoo heeft men uit (d):

$$a^2 = \rho_0{}^2 - \frac{A\, p_0{}^2}{M\,(B - C)}\,,\; b^2 = \rho_0{}^2 + \frac{B\, q_0{}^2}{M\,(A - C)}\,,\; c^2 = \rho_0{}^2 - \frac{C\, r_0{}^2}{M\,(A - B)},$$

die aan (e) voldoen, en nu tevens doen zien, dat b^2 altijd de grootste is, terwijl $a^2 >=$ of $< c^2$ kan zijn.

Neemt men aan dat

$$a^2 > c^2$$

is, dan zal, blijkens (d), altijd

$$\rho^2 > a^2 \text{ en } \rho^2 < b^2$$

moeten blijven.

Het product der vergelijkingen (d) geeft, ingevolge (c), en lettende op de waarde van M:

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(b^2 - \rho^2)(\rho^2 - c^2)},$$

of

$$\frac{d.\rho^2}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(b^2 - \rho^2)(\rho^2 - c^2)}} = 2\,dt; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

men stelle nu, volgens hetgeen opgemerkt is ten opzigte van de waarden die ρ kan hebben,

$$\rho^2 = a^2 + (b^2 - a^2)\,Cos.^2\,\omega, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Zoodat de aanvankelijke waarde, ω_0 van ω, in het 1e quadrant genomen kan worden, en dus ω aanvankelijk moet afnemen als ρ aanvankelijk aangroeit, en omgekeerd, dan volgt daaruit:

$$\rho^2 - a^2 = (b^2 - a^2)\,Cos.^2\,\omega,$$
$$b^2 - \rho^2 = (b^2 - a^2)\,Sin.^2\,\omega,$$
$$\rho^2 - c^2 = (b^2 - c^2) - (b^2 - a^2)\,Sin.^2\,\omega,$$

en dus door substitutie in (f):

$$\frac{d.\omega}{\sqrt{\{(b^2 - c^2) - (b^2 - a^2)\,Sin.^2\,\omega)}} = \mp\,dt, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

waarin het bovenste teeken genomen moet worden, als ω na den aanvang der beweging moet afnemen, en het benedenste in het tegengestelde geval.

Daar nu $a^2 > c^2$ is gesteld, en dus $b^2 - a^2 < b^2 - c^2$ is, mag men stellen:

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2 - c^2} = m^2, \qquad m^2 < 1,$$

waardoor (h) verandert in:

$$\frac{d.\omega}{\sqrt{(1 - m^2\,Sin.^2\,\omega)}} = \mp\sqrt{(b^2 - c^2)}\,dt, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

en dus, als men de constante

$$\int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - m^2\,Sin.^2\omega)}} = l\sqrt{(b^2 - c^2)}$$

stelt:

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - m^2\,Sin.^2\,\omega)}} = \mp\,(b^2 - c^2)\,(t \mp l), \quad \ldots\ldots \quad (h')$$

waarin gelijktijdig de bovenste of onderste teekens genomen moeten worden.

Stelt men nu ter bekorting:

$$\pm \sqrt{(b^2 - c^2)}\,(t \pm l) = u, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (k)$$

dan is, volgens de voorgaande vergelijking, ω de amplitude der elliptische functie van de eerste soort, die u tot waarde heeft, en waarvan m de modulus is, dus:

$$\omega = amp.\, u \qquad 1 - m^2\, Sin.^2\, \omega = \Delta.\, amp.\, u,$$

en volgens (g):

$$\rho^2 = a^2 + (b^2 - a^2)\, Cos.^2\, amp.\, u,$$

en dit in (d) overbrengende:

$$p = -\frac{k}{A} Sin.\,\theta\, Sin.\,\varphi = \sqrt{\frac{M(B-C)}{B}} \sqrt{(b^2 - a^2)}\; Cos.\, amp.\, u \quad . \; . \; . \; . \; (l)$$

$$q = -\frac{k}{B} Sin.\,\theta\, Cos.\,\varphi = \sqrt{\frac{M(A-C)}{B}} \sqrt{(b^2 - a^2)}\, Sin.\, amp.\, u,$$

$$r = \frac{k}{C} Cos.\,\theta = \sqrt{\frac{M(A-B)}{C}} \sqrt{(b^2 - c^2)}\; \Delta.\, amp.\, u,$$

Uit de aanvankelijke waarden van p, q, r zal men, door (c), kunnen zien of ρ aanvankelijk aangroeit of afneemt. Is namelijk aanvankelijk het eerste lid van die vergelijking positief, dan groeit ρ aan; in het tegengestelde geval neemt ρ af. In het eerste geval moet men in (h), en dus ook in (i), het bovenste teeken nemen; in het tweede geval het benedenste. Hierdoor is ook het teeken in u (k) bepaald; en uit de aanvankelijke waarden van p, q, r bepaalt men dan eindelijk de teekens der in de vergelijkingen (l) voorkomende wortels.

Dewijl r nooit nul wordt, kan hare waarde ook niet van teeken veranderen, zoodat zij tijdens den geheelen duur der beweging hetzelfde teeken behoudt, terwijl dat van p en q te gelijk met dat van *Cos. amp. u* en *Sin. amp. u* omkeert.

Zijn de de aanvankelijke waarden van p, q, r zoodanig, dat niet $a^2 > c^2$, maar $c^2 > a^2$ is, dan behoeft men in de vergelijkingen (l) slechts p met r en a met c te verwisselen; p krijgt dan den vorm van r, en r dien van p, terwijl de vorm van q onveranderd blijft.

Men kan de vergelijkingen (l) ook nog onder de volgende gedaante schrijven, waarbij dan $Cos.\, amp.\, u_0 = Cos.\, \omega_0$ is,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{Cos.\, amp.\, u}{Cos.\, amp.\, u_0},\ \frac{q}{q_0} = \frac{Sin.\, amp.\, u}{Sin.\, amp.\, u_0},\ \frac{r}{r^0} = \frac{\Delta.\, amp.\, u}{\Delta.\, amp.\, u_0}.$$

Om de standvastige k in de constanten der integratie uit te drukken, kan men in de vergelijkingen (l) aan u eene willekeurige waarde geven; stelt men dan $Cos.\ amp.\ u = 1$, en dus $Sin.\ amp.\ u = 0$, $\Delta\ amp.\ u = 1$, dan heeft men onmiddelijk:

$$k^2 = \mathrm{A\,M\,(B-C)}\,(b^2-a^2) + \mathrm{C\,M\,(A-B)}\,(b^2-c^2),$$

of, lettende op de waarden van M en m,

$$k = \mathrm{C}\sqrt{\frac{\mathrm{A\,B}}{\mathrm{(A-C)\,(B-C)}}}\sqrt{\left\{1 + \frac{\mathrm{A\,(B-C)}}{\mathrm{C\,(A-B)}}m^2\right\}}\sqrt{(b^2-c^2)};$$

en, door dit in (l) over te brengen, zijn dus ook φ en θ in functie van t bepaald.

De derde vergelijking (1) geeft ter bepaling van ψ:

$$d\,\psi = \frac{d\,\varphi}{Cos.\,\theta} - \frac{r\,d\,t}{Cos.\,\theta}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

maar uit de twee eerste (l) vindt men:

$$Tang.\ \varphi = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{A\,(B-C)}}{\mathrm{B\,(A-C)}}}\ Cotang.\ amp.\ u,$$

waarin het bovenste of onderste teeken moet genomen worden, naarmate de aanvankelijke waarden van p en q gelijke of ongelijke teekens hebben.

Hieruit volgt dan, met inachtneming van hetzelfde betrekkelijk de teekens:

$$d\,\varphi = \mp\frac{\sqrt{\mathrm{A\,B\,(A-C)\,(B-C)}}\ .\ d.\ amp.\ u}{\mathrm{B\,(A-C)}\ Sin.^2\ amp.\ u + \mathrm{A\,(B-C)}\ Cos.^2\ amp.\ u}; \quad \ldots \quad (n)$$

de derde (l) geeft:

$$\frac{r}{Cos.\,\theta} = \frac{k}{c}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

zoodat r en $cos.\,\theta$ altijd gelijke teekens hebben, en

$$Cos.\,\theta = \frac{\mathrm{C}}{k}\sqrt{\frac{\mathrm{A\,B}}{\mathrm{(A-C)\,(B-C)}}}\sqrt{(b^2-c^2)}\ \Delta.\ amp.\ u \quad \ldots\ldots \quad (q)$$

is.

Hierbij moet nu opgemerkt worden, dat als p en q aanvankelijk gelijke teekens hebben, ingevolge (c), $r = \rho\ Cos.\ \nu$ het teeken $\pm$ moet hebben, naarmate ρ aanvankelijk aangroeit of afneemt. Dus is dit ook zoo met $Cos.\ \theta$, en dewijl in dit geval $d\,\varphi$ het teeken — heeft, verkrijgt de eerste term in (m), namelijk $d\,\varphi : Cos.\ \theta$, het teeken $\mp$. Hebben p en q aanvankelijk ongelijke

teekens, dan moet, volgens (c), $r = \rho\, Cos.\, \nu$ het teeken $\mp$ hebben, naarmate ρ aanvankelijk aangroeit of afneemt, maar dewijl nu in dat geval $d\varphi$ het teeken $+$ heeft, verkrijgt wederom de eerste term in (m), namelijk $d\varphi : Cos.\, \theta$, het teeken $\mp$.

Door substitutie van (n), (p) en (q) in (m) verkrijgt men dus, hetzij p en q aanvankelijk al of niet gelijke teekens hebben:

$$\psi\, d = \frac{k}{C}\left\{\mp \frac{(A-C)(B-C)}{B(A-C)\, Sin.^2\, amp.u + A(B-C)\, Cos.^2\, amp.u} \cdot \frac{d\, amp.u}{\sqrt{(b^2-c^2)}\, \Delta\, amp.u} - dt\right\}, \; .(r)$$

waarin het bovenste teeken genomen moet worden, als ρ aanvankelijk aangroeit. Substitueert men hierin voor $d\,t$ de waarde uit (k), namelijk:

$$d\,t = \mp \frac{d\,u}{\sqrt{(b^2-c^2)}} = \mp \frac{d.\, amp.u}{\sqrt{(b^2-c^2)}.\, \Delta.\, amp.u},$$

en stelt men ook voor k hare waarde, dan wordt (r):

$$d\psi = \sqrt{\frac{A\, B}{(A-C)(B-C)}} \sqrt{\left\{1 + \frac{A(B-C)}{C(A-B)} m^2\right\}} \left\{\mp \frac{(A-C)(B-C)}{A(B-C)+C(A-B) Sin.^2\, amp.u} \cdot \frac{d.\, amp.u}{\Delta.\, amp.u} \pm d\,u\right\},$$

het blijkt hieruit, dat ψ, behalve van eene elliptische functie van de eerste soort, ook nog afhankelijk is, van zulk eene functie van de derde soort, met circulaire parameter. De eerste term van den laatsten factor namelijk, zal, als men de positieve grootheid

$$\frac{C\,(A-B)}{A\,(B-C)} = n^2$$

stelt, aanleiding geven tot de integraal:

$$\int \frac{1}{1 + n^2\, Sin.^2\, \omega} \cdot \frac{d\,\omega}{\sqrt{(1 - m^2\, Sin.^2\, \omega)}}$$

De verdere herleiding der gevonden integralen zoude nu op dezelfde wijze kunnen geschieden als dit gedaan is door JACOBI, in zijne verhandeling „*Sur la rotation d'un corps*" (Crelle, 39e Band). De herleide formulen doen zich wel onder een zeer eenvoudigen vorm voor, maar zij hebben het nadeel, dat de constanten der integratie op nieuw verbonden worden met de standvastige gegevens van het vraagstuk. Wilde men op die formulen de methode van het variëren der constanten in toepassing trachten te brengen, dan zou-

den, als eerste zwarigheid, de uitdrukkingen van hare variatiën uiterst ingewikkeld worden.

De in het voorgaande gegeven formulen komen overigens overeen met die van onzen landgenoot Rueb, in zijne academische dissertatie »*de motu gyratorio corporis rigidi nulla vi acceleratrice sollicitati*" en met die van Jacobi, met dit onderscheid echter, dat de constanten der integratie, zoo veel als mogelijk, als op zich zelve staande factoren voorkomen, waardoor hare variatiën, met betrekking tot die constanten, meer eenvoudig zijn. Evenwel blijft de toepassing der genoemde methode, op de juiste integralen der bewegingsvergelijkingen (1) en (5), aan groote zwarigheden onderhevig, en is men, voor het geval dat er uitwendige krachten werken, genoodzaakt om van benaderende integralen gebruik te maken. Zie Poisson, *Mémoire sur le mouvement de la terre autour de son centre de gravité.* *Tome VII* der »*Mémoires de l'acad. roy. des sciences de l'instit. de France,* bladz. 199.

Bij de beweging echter van de aarde om haar zwaartepunt, kan men het gebruik der gezegde methode geheel ontwijken, en komt men dan zelfs langs een meer eenvoudigen weg tot de formulen, welke Poisson, in de aangehaalde verhandeling, voor de praecessie en nutatie gegeven heeft. Hierbij, even als hij, uitgaande van de stelling, dat de verplaatsingen van de omwentelingspolen der aarde, over haar oppervlak uiterst gering moeten zijn, omdat de waarnemingen die, tot nu toe, nog niet hebben doen kennen; waaruit noodzakelijk volgt, dat de as van omwenteling nagenoeg te zamen valt met eene hoofdas, die de as moet zijn van haar grootste moment van traagheid, omdat de aarde aan hare omwentelingspolen is afgeplat.

6.

Om de vergelijkingen voor de draaijende beweging om een vast punt toe te passen op de beweging der aarde om haar zwaartepunt, onder den invloed der aantrekking van eenig hemelligchaam, beginnen wij met de versnellende koppels te berekenen, welke die aantrekking oplevert loodregt op de hoofdassen der aarde.

Hierbij mag men het aantrekkend ligchaam als een enkel massief punt beschouwen, dewijl de aldus berekende aantrekking in reden is tot de grootheid, die alsdan buiten rekening blijft, als de tweede magt van den afstand

tusschen zijn zwaartepunt en dat der aarde tot de tweede magt van zijn straal.

Laten dan α, β, γ de coördinaten zijn van het zwaartepunt van het aantrekkend ligchaam, evenwijdig met de hoofdassen, $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, die door het zwaartepunt der aarde gaan; δ en r de afstanden van dat punt tot aan het zwaartepunt der aarde, en tot aan eene van hare moleculen dm, die ξ, η, ζ tot coördinaten heeft, zoodat:

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \qquad r^2 = (\alpha-\xi)^2 + (\beta-\eta)^2 + (\gamma-\zeta)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

is; dan zijn, als L een nader te bepalen standvastig getal voorstelt,

$$X = \frac{L\,dm}{r^2}\,\frac{\alpha-\xi}{r},\ Y = \frac{L\,dm}{r^2}\,\frac{\beta-\eta}{r},\ Z = \frac{L\,dm}{r^2}\,\frac{\gamma-\zeta}{r},$$

de composanten der attractie op de molecule dm, in de veronderstelling, dat die attractie evenredig aan de massa, en omgekeerd evenredig aan de tweede magt van den afstand is. De differentialen der versnellende koppels, P, Q, R, zijn derhalven:

$$dP = \eta Z - \zeta Y = \frac{L\,dm}{r^3}(\gamma\,\eta - \beta\,\zeta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$dQ = \zeta X - \xi Z = \frac{L\,dm}{r^3}(\alpha\,\zeta - \gamma\,\xi),$$

$$dR = \xi Y - \eta X = \frac{L\,dm}{r^3}(\beta\,\xi - \alpha\,\eta).$$

Nu volgt uit (1):

$$r^{-3} = \delta^{-3}\left\{1 - \frac{2\,(\alpha\,\xi + \beta\,\eta + \gamma\,\zeta)}{\delta^2} + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\delta^2}\right\}^{-\frac{3}{2}},$$

dat is, als men vooreerst de tweede magten der quotienten $\frac{\xi}{\delta}$, $\frac{\eta}{\delta}$, $\frac{\zeta}{\delta}$, welke zeer klein zijn, in vergelijking van $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, wier waarden gelijk 1 kunnen zijn, buiten berekening laat:

$$r^{-3} = \delta^{-3}\left\{1 + \frac{3\,(\alpha\,\xi + \beta\,\eta + \gamma\,\zeta)}{\delta^2}\right\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Substitueert men deze waarden in (2), en neemt men in aanmerking, dat

$$\int \xi\,dm = \int \eta\,dm = \int \zeta\,dm = 0\,, \text{ en ook, } \int \eta\,\zeta\,dm = \int \zeta\,\xi\,dm = \int \xi\,\eta\,dm = 0$$

is, als de integralen over de geheele massa der aarde worden uitgebreid, dan vindt men:

$$P = \frac{3\,L}{\delta^5}\,\beta\,\gamma \int (\eta^2 - \zeta^2)\, d\,m\,,$$

$$Q = \frac{3\,L}{\delta^5}\,\gamma\,\alpha \int (\zeta^2 - \xi^2)\, d\,m\,,$$

$$R = \frac{3\,L}{\delta^5}\,\alpha\,\beta \int (\xi^2 - \eta^2)\, d\,m\,,$$

of, als men de momenten van traagheid wederom door A, B, C voorstelt:

$$P = \frac{3\,L}{\delta^5}\,(C - B)\,\beta\,\gamma\,, \qquad \qquad (4)$$

$$Q = \frac{3\,L}{\delta^5}\,(A - C)\,\gamma\,\alpha\,,$$

$$R = \frac{3\,L}{\delta^5}\,(B - A)\,\alpha\,\beta\,,$$

welke waarden nu naauwkeurig zijn tot aan de *vierde magten* der zeer kleine quotienten $\frac{\xi}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}, \frac{\zeta}{\delta}$. Als men namelijk de ontwikkeling van r^{-3} tot de tweede magten van die grootheden voortzet, dan zijn de termen, die men daardoor in (2) verkrijgt, allen ten opzigte van ξ, η, ζ van den derden graad, terwijl bij het integreren de integralen van den vorm

$$\int \xi^3 d\,m\,, \qquad \int \xi^2 \eta\, d\,m\,, \qquad \int \xi\,\eta\,\zeta\, d\,m\,, \ldots\ldots$$

verdwijnen als zij over het geheele ligchaam worden uitgebreid, wanneer dit uit homogene lagen bestaat, die ten opzigte van de coördinaten-vlakken symetriek gelegen zijn. Want, dan wordt er voor elke molecule, waarvoor $\xi^3, \xi^2\eta, \xi\eta\zeta$, zekere waarden hebben, eene overeenkomstige molecule gevonden, waarvoor die waarden, op het teeken na, gelijk zijn; zoodat elk der gezegde integralen eene som is van termen, die elkander twee aan twee vernietigen. In het algemeen zal voor zulk een ligchaam, eenige integraal $\int \xi^p\, \eta^q\, \zeta^r\, d\,m$ verdwijnen, als niet alle exponenten p, q, r even zijn.

Zet men echter de ontwikkeling van r^{-3} voort tot de derde magten van $\frac{\xi}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}, \frac{\zeta}{\delta}$, en substitueert men die ontwikkeling in (2), dan behoudt men, na de termen die elkander vernietigen en de integralen die van zelfs verdwijnen, nog integralen over waarin slechts positieve elementen voorkomen, om-

dat daarin alle exponenten even zijn, en die dus niet verdwijnen. Haar invloed op de waarden van P, Q en R is echter zeer gering, daar zij ten opzigte van δ van twee graden lager zijn dan de nu berekende. Voor de maan als aantrekkend ligchaam is het maximum van $\frac{\xi}{\delta} = \frac{1}{60}$ en dus $\left(\frac{\xi}{\delta}\right)^3 < 0.000005$ $\left(\frac{\xi}{\delta}\right)^4 < 0.00000008$; voor de zon zijn die waarden nog veel minder.

Bij de berekening der versnellende koppels is het geoorloofd de aarde als een geheel vast ligchaam te beschouwen; in de *Mécanique Céleste* is bewezen, dat de draaijende beweging van eene spheroïde, die bedekt is met eene laag vloeistof, wier dikte naar eene willekeurige wet verandert, dezelfde blijft, als die laag in den vasten toestand overgaat.

De standvastige L in de formulen (4) is gelijk aan het product der massa van het aantrekkende ligchaam met de versnelling, die in de eenheid van massa wordt voortgebragt door eene andere eenheid, welke van de eerste op de eenheid van afstand is verwijderd, waarbij men zich de beide eenheden van massa als enkel massieve punten moet voorstellen. Laat f deze versnelling zijn, en stel dat M en M′ de massa zijn van twee hemelligchamen, wier massa in hun zwaartepunt vereenigd gedacht wordt, en waarvan M′ eene elliptische beweging heeft om M, (gesteld dat men deze beweging kent, zoo als zij zonder den invloed der storende krachten plaats zoude hebben), dan is $f\,(M + M')$ de relatieve versnelling, voor de eenheid van afstand, die M op M′ uitoefent. Maar als a de halve groote as is der ellips die M′ om M beschrijft, en T de omloopstijd voorstelt, dan wordt die versnelling ook uitgedrukt door $4\pi^2 a^3 : T^2$, zoodat men heeft:

$$f = \frac{1}{M + M'} \cdot \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Als dus M de massa der aarde, M′ die van het aantrekkende ligchaam, en $m = 2\pi : T$, de middelbare hoeksnelheid in de ongestoorde loopbaan voorstelt, dan moet in de formulen (4)

$$L = \frac{M' a^3 m^2}{M + M'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

genomen worden.

Men weet dat de gedaante der aarde weinig afwijkt van die van het ligchaam, dat voortgebragt wordt door de omwenteling van eene ellips om hare

kleine as; onderstelt men nog dat zij uit homogene lagen bestaat, wier digtheid naar zekere wet verandert, dan zal het verschil der hoofdmomenten van traagheid, wier assen in het vlak van den evenaar liggen, zeer gering zijn, en als men de as der omwentelings-ellipsoïde voor $O\zeta$ as aanneemt, is dan

$$A = B \quad \text{en} \quad C > A,$$

waardoor men voor de bewegings-vergelijkingen om het zwaartepunt, met bijvoeging van de versnellende koppels der attractie, heeft:

$$A\frac{dp}{dt} + (C-A)\,qr = P \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$A\frac{dq}{dt} - (C-A)\,pr = Q,$$

$$C\frac{dr}{dt} = 0;$$

waarin nu P en Q uit de som van zoo veel gelijksoortige termen bestaan als er aantrekkende hemelligchamen beschouwd worden. Hiervoor komen alleen in aanmerking de zon, wegens hare aanzienlijke massa, en de maan wegens haren geringen afstand, terwijl de overige planeten, wegens hare geringe massa en groote afstanden, van geen merkbaren invloed zijn.

Bij die vergelijkingen moeten nog gevoegd worden, als men kortheidshalven de differentiaal-quotienten ten opzigte van den tijd door $d_{,}\psi \ldots\; d_{,}^{2}\psi \ldots$ voorstelt:

$$p = Sin.\,\theta\; Sin.\,\varphi\; d_{,}\psi - Cos.\,\varphi\; d_{,}\theta \;\ldots\ldots\ldots \quad (7$$

$$q = Sin.\,\theta\; Cos.\,\varphi\; d_{,}\psi + Sin.\,\varphi\; d_{,}\theta$$

$$r = d_{,}\varphi - Cos.\,\theta\; d_{,}\psi$$

Wordt nu het vlak, dat op zeker tijdstip het vlak der ecliptica is, voor vast xy vlak aangenomen, dan is ψ de lengte van de lijn der nachteveningen, geteld in de tegengestelde rigting van de jaarlijksche beweging der aarde, van af zekere vaste lijn in het xy vlak, en θ de helling van den evenaar op de vaste ecliptica of de schuinsheid der ecliptica.

Uit de derde vergelijking (6) volgt onmiddellijk

$$r = Constant = n,$$

dat is, de hoeksnelheid der aarde om de as van haar grootste moment van traagheid is onveranderlijk. Daar blijkens de waarnemingen deze as nagenoeg te zamen valt met de as der dagelijksche beweging, zal n, op eene

zeer kleine grootheid na, gelijk zijn aan de hoeksnelheid van die beweging, zoodat dan door deze waarde van r in de twee eerste vergelijkingen (6) over te brengen, uit die vergelijkingen volgt, dat p en q zeer kleine grootheden moeten zijn, van dezelfde orde als de storende krachten, die de versnellende koppels P en Q hebben opgeleverd.

Uit de vergelijkingen (7) volgt dan, dat $d_{,}\psi$ en $d_{,}\theta$ van dezelfde orde zijn, hetgeen eveneens door de waarnemingen wordt bevestigd, alzoo hier $d_{,}\psi$ den teruggang van de lijn der nachteveningen en $d_{,}\theta$ de verandering voorstelt, die de schuinsheid der gezegde ecliptica ondergaat. Buitendien leeren die waarnemingen, dat $d_{,}\psi$ en $d_{,}\theta$, althans voor een zeer ruim tijdsverloop en gerekend op de vaste ecliptica, nagenoeg standvastig zijn. Laat men dus de termen, die ten opzigte van deze reeds zeer kleine grootheden van de tweede orde zijn, buiten berekening, dan mag men stellen:

$$d_{,}\psi = d_{,}\theta^2 = d_{,}\psi\, d_{,}\theta = 0\,, \quad d_{,}^2\psi = 0\,, \quad d_{,}^2\theta = 0\,.$$

Uit de vergelijkingen (7) volgt dan:

$$d_{,}p = Sin.\,\theta\, Cos.\,\varphi\, d_{,}\varphi\, d_{,}\psi + Sin.\,\varphi\, d_{,}\varphi\, d_{,}\theta\,,$$

$$d_{,}q = - Sin.\,\theta\, Sin.\,\varphi\, d_{,}\varphi\, d_{,}\psi + Cos.\,\varphi\, d_{,}\varphi\, d_{,}\theta\,,$$

en

$$p\,r = n\, Sin.\,\theta\, Sin.\,\varphi\, d_{,}\psi - n\, Cos.\,\varphi\, d_{,}\theta\,,$$

$$q\,r = n\, Sin.\,\theta\, Cos.\,\varphi\, d_{,}\psi + n\, Sin.\,\varphi\, d_{,}\theta\,;$$

dit in de twee eerste (6) overbrengende, in aanmerking nemende dat

$$d_{,}\psi\,(d_{,}\varphi - n) = Cos.\,\theta\, d_{,}\psi^2 = 0\,, \quad d_{,}\theta\,(d_{,}\varphi - n) = Cos.\,\theta\, d_{,}\psi\, d_{,}\theta = 0$$

is, verkrijgt men:

$$\mathrm{C}\, n\, Sin.\,\theta\, Cos.\,\varphi\, d_{,}\psi + \mathrm{C}\, n\, Sin.\,\varphi\, d_{,}\theta = \mathrm{P}\,,$$

$$- \mathrm{C}\, n\, Sin.\,\theta\, Sin.\,\varphi\, d_{,}\psi + \mathrm{C}\, n\, Cos.\,\varphi\, d_{,}\theta = \mathrm{Q}\,,$$

waaruit:

$$d_{,}\theta = \frac{1}{\mathrm{C}\,n}\left\{ \mathrm{P}\, Sin.\,\varphi + \mathrm{Q}\, Cos.\,\varphi \right\} \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (8)$$

$$d_{,}\psi = \frac{1}{\mathrm{C}\,n\, Sin.\,\theta}\left\{ \mathrm{P}\, Cos.\,\varphi - \mathrm{Q}\, Sin.\,\varphi \right\}$$

Brengt men in deze formulen voor P en Q hare waarden uit (4), daarbij in aanmerking nemende dat $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ is, en stelt men kortheidshalve

$$\frac{3\,\mathrm{L}\,(\mathrm{C} - \mathrm{A})}{\mathrm{C}\,n} = \mathrm{D}\,, \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (9)$$

dan worden zij:

$$d_{,}\theta = \frac{\mathrm{D}}{\delta^5}\,\gamma\,(\beta\,Sin.\,\varphi - \alpha\,Cos.\,\varphi)\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$d_{,}\psi = \frac{\mathrm{D}}{\delta^5\,Sin.\,\theta}\,\gamma\,(\beta\,Cos.\varphi + \alpha\,Sin.\varphi)\,;$$

waarin α, β en γ de coördinaten zijn van het zwaartepunt van het aantrekkende ligchaam, ten opzigte van de hoofdassen der aarde. Zijn x, y en z de coördinaten van dat punt ten opzigte van de vaste assen, waarvan er twee in het vaste vlak liggen, dat op zeker tijdstip overeenkwam met het vlak der ecliptica, terwijl de oz as loodregt op dat vlak staat en naar de zijde van de noordpool der aarde is gerigt, dan heeft men volgens de bekende formulen voor de verandering van coördinaten:

$$\alpha = x(Cos.\,\theta\,Sin.\,\psi\,Sin.\,\varphi + Cos.\,\psi\,Cos.\,\varphi) + y\,(Cos.\,\theta\,Cos.\,\psi\,Sin.\,\varphi - Sin.\,\psi\,Cos.\,\varphi) - z\,Sin.\,\theta\,Sin.\,\varphi,$$

$$\beta = x(Cos.\,\theta\,Sin.\,\psi\,Cos.\,\varphi - Cos.\psi\,Sin.\,\varphi) + y\,(Cos.\,\theta\,Cos.\,\psi\,Cos.\,\varphi + Sin.\,\psi\,Sin.\,\varphi) - z\,Sin.\,\theta\,Cos.\,\varphi,$$

$$\gamma = x\,Sin.\,\theta\,Sin.\,\psi + y\,Sin.\,\theta\,Cos.\,\psi + z\,Cos.\,\theta\,,$$

waaruit volgt:

$$\beta\,Sin.\,\varphi - \alpha\,Cos.\,\varphi = - x\,Cos.\,\psi + y\,Sin.\,\psi\,,$$

$$\beta\,Cos.\,\varphi + \alpha\,Sin.\,\varphi = x\,Cos.\,\theta\,Sin.\,\psi + y\,Cos.\,\theta\,Cos.\,\psi - z\,Sin.\,\theta\,;$$

is verder δ' de projectie op het xy vlak van den verstraal δ van het aantrekkende punt, en v' de lengte van dat punt, gerekend in gezegd vlak van de as der x af aan, dan heeft men:

$$x = \delta'\,Cos.\,v', \qquad y = \delta'\,Sin.\,v',$$

waardoor men verkrijgt:

$$\beta\,Sin.\,\varphi - \alpha\,Cos.\,\varphi = - \delta'\,Cos.\,(v' + \psi),$$

$$\beta\,Cos.\,\varphi + \alpha\,Sin.\,\varphi = \delta'\,Cos.\,\theta\,Sin.\,(v' + \psi) - z\,Sin.\,\theta\,,$$

$$\gamma = \delta'\,Sin.\,\theta\,Sin.\,(v' + \psi) + z\,Cos.\,\theta,$$

en dus, dit in (10) overbrengende:

$$d_{,}\theta = -\frac{\mathrm{D}}{\delta^5}\left\{\tfrac{1}{2}\,\delta'^2\,Sin.\,\theta\,Sin.\,2\,(v' + \psi) + \delta' z\,Cos.\,\theta\,Cos.\,(v' + \psi)\right\}. \quad \ldots \quad (11)$$

$$d_{,}\psi = \frac{\mathrm{D}}{\delta^5}\left\{[\delta'^2\,Sin.^2\,(v' + \psi) - z^2]\,Cos.\,\theta + \delta' z\,Sin.\,(v' + \psi)\frac{Cos.\,2\,\theta}{Sin.\,\theta}\right\}.$$

Men heeft echter als s de breedte voorstelt van het aantrekkende punt, en die breedte zoo gering is, dat hare derde magten buiten berekening kunnen blijven:

$$\delta' = \delta\,(1 + s^2)^{-\frac{1}{2}} = \delta\,(1 - \tfrac{1}{2}\,s^2)\,, \qquad z = \delta\,s\,,$$

en dus ook

$$\delta' z = \delta^2\,s\,, \qquad \delta'^2 = \delta^2\,(1 - s^2)\,;$$

waardoor men verkrijgt, voor $d\theta$ en $d\psi$ nu $\frac{d\theta}{dt}$ en $\frac{d\psi}{dt}$ schrijvende:

$$d\theta = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{D}\left\{\frac{1-s^2}{\delta^3}\,Sin.\,\theta\,Sin.\,2\,(v'+\psi) + \frac{2\,s}{\delta^3}\,Cos.\,\theta\,Cos.\,(v'+\psi)\right\}dt\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$d\psi = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{D}\left\{\left[\frac{1-3\,s^2}{\delta^3} - \frac{1-s^2}{\delta^3}\,Cos.\,2\,(v'+\psi)\right]Cos.\,\theta + \frac{2\,s}{\delta^3}\,Sin.\,(v'+\psi)\,\frac{Cos.\,2\,\theta}{Sin.\,\theta}\right\}dt.$$

Verder heeft men uit de theorie der elliptische beweging, als a de halve groote as der elliptische baan, e de excentriciteit, $mt + \varepsilon$, de middelbare lengte van het aantrekkende punt in zijne baan, ω de lengte van het perigeum, l de lengte van den klimmenden knoop, en λ de helling der baan op de vaste ecliptica voorstellen, wanneer men de termen, die ten opzigte van de zeer kleine grootheden λ en e van de derde orde zijn, buiten rekening laat:

$$\delta = a\,[1 + \tfrac{1}{2}\,e^2 - e\,Cos.\,(mt + \varepsilon - \omega) - \tfrac{1}{2}\,e^2\,Cos.\,2\,(mt + \varepsilon - \omega)]$$

$$v' = mt + \varepsilon + 2\,e\,Sin.\,(mt + \varepsilon - \omega) + \tfrac{5}{4}\,e^2\,Sin.\,2\,(mt + \varepsilon - \omega) - \tfrac{1}{4}\,\lambda^2\,Sin.\,2\,(mt + \varepsilon - l)$$

$$s = \lambda\,Sin.\,(mt + \varepsilon - l) + \lambda\,e\,(.\ .\ .\ .\ .\ .)\,;$$

dus als men

$$v' = mt + \varepsilon + \sigma$$

stelt:

$$Sin.\,\sigma = \sigma = 2\,e\,Sin.\,(mt + \varepsilon - \omega) + \tfrac{5}{4}\,e^2\,Sin.\,2\,(mt + \varepsilon - \omega) - \tfrac{1}{4}\,\lambda^2\,Sin.\,2\,(mt + \varepsilon - l)\,,$$

$$Cos.\,\sigma = 1 - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2 = 1 - e^2 + e^2\,Cos.\,2\,(mt + \varepsilon + \omega)\,,$$

$$Sin.\,2\,\sigma = 2\,\sigma = 4\,e\,Sin.\,(mt + \varepsilon - \omega) + \tfrac{5}{2}\,e^2\,Sin.\,2\,(mt + \varepsilon - \omega) - \tfrac{1}{2}\,\lambda^2\,Sin.\,2\,(mt + \varepsilon - l)\,,$$

$$Cos.\,2\,\sigma = 1 - 2\,\sigma^2 = 1 - 4\,e^2 + 4\,e^2\,Cos.\,2\,(mt + \varepsilon - \omega)\,;$$

waaruit verder volgt:

$$\delta^{-3} = a^{-3}\,[1 + \tfrac{3}{2}\,e^2 + 3\,e\,Cos.\,(mt + \varepsilon - \omega) + \tfrac{9}{2}\,e^2\,Cos.\,2\,(mt + \varepsilon - \omega)]\,,$$

$$1 - s^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\,\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\,\lambda^2\,Cos.\,2\,(mt + \varepsilon - l)\,,$$

$$1 - 3s^2 = 1 - \tfrac{3}{2}\,\lambda^2 + \tfrac{3}{2}\,\lambda^2\,Cos.\,2\,(mt + \varepsilon - l)\,;$$

$$\frac{1-s^2}{\delta^3} = a^{-3}[1 + \tfrac{3}{2}\,e^2 - \tfrac{1}{2}\,\lambda^2 + 3\,e\,Cos.\,(mt + \varepsilon - \omega) + \tfrac{9}{2}\,e^2\,Cos.\,2\,(mt + \varepsilon - \omega) + \tfrac{1}{2}\,\lambda^2\,Cos.\,2\,(mt + \varepsilon - l)]$$

$$\frac{1-3s^2}{\delta^3} = a^{-3}\left[1 + \tfrac{3}{2}e^2 - \tfrac{3}{2}\lambda^2 + \ldots\ldots\right]$$

$$\frac{1-s^2}{\delta^3}\, Cos.2\sigma = a^{-3}\left[1 - \tfrac{5}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}\lambda^2 + 3\,e\,Cos.(mt+\varepsilon-\omega) + \tfrac{17}{2}e^2\,Cos.2(mt+\varepsilon-\omega) + \tfrac{1}{2}\lambda^2\,Cos.2(mt+\varepsilon-l)\right]$$

$$\frac{1-s^2}{\delta^3}\, Sin.2\sigma = a^{-3}\left[4\,e\,Sin.(mt+\varepsilon-\omega) + \tfrac{17}{2}e^2\,Sin.2(mt+\varepsilon-\omega) - \tfrac{1}{2}\lambda^2\,Sin.2(mt+\varepsilon-l)\right]$$

$$\frac{s}{\delta^3} = a^{-3}\lambda\left[Sin.(mt+\varepsilon-l) + 3\,e\,Sin.(mt+\varepsilon-l)\,Cos.(mt+\varepsilon-\omega)\right]$$

$$\frac{s}{\delta^3}\, Cos.\sigma = \frac{s}{\delta^3}$$

$$\frac{s}{\delta^3}\, Sin.\sigma = a^{-3}\lambda.\,e.\,2\,Sin.(mt+\varepsilon-l)\,Sin.(mt+\varepsilon-\omega).$$

Nu is

$$\frac{1-s^2}{\delta^3}\, Sin.2(v'+\psi) = \frac{1-s^2}{\delta^3}\left\{Sin.2(mt+\varepsilon+\psi)\,Cos.2\sigma + Cos.2(mt+\varepsilon+\psi)\,Sin.2\sigma\right\};$$

als men hier in de waarden van den eersten factor, van $Cos.\,2\sigma$ en $Sin.\,2\sigma$ overbrengt: de producten van sinussen en cosinussen tot sommen en verschillen herleidt, en van de periodieke termen, die het argument $mt+\varepsilon$ hebben, alleen die behoudt, welke noch λ noch e tot factor hebben, omdat die termen na de integratie den factor m in den noemer krijgen, dan blijft er van den eersten term alleen

$$Sin.2(mt+\varepsilon+\psi) + \tfrac{17}{4}e^2\,Sin.(\psi+\omega) + \tfrac{1}{4}\lambda^2\,Sin.2(\psi+l),$$

en van den laatsten term slechts

$$-\tfrac{17}{4}e^2\,Sin.(\psi+\omega) + \tfrac{1}{4}\lambda^2\,Sin.2(\psi+l);$$

zoodat dan:

$$\frac{1-s^2}{\delta^3}\, Sin.2(v'+\psi) = a^{-3}\left[Sin.2(mt+\varepsilon+\psi) + \tfrac{1}{2}\lambda^2\,Sin.2(\psi+l)\right]$$

wordt.

Even zoo is

$$\frac{2s}{\delta^3}\, Cos.(v'+\psi) = \frac{2s}{\delta^3}\left\{Cos.(mt+\varepsilon+\psi)\,Cos.\sigma - Sin.(mt+\varepsilon+\psi)\,Sin.\sigma\right\},$$

waarvan op dezelfde wijze gevonden wordt, dat de tweede term geheel en al buiten rekening blijft, terwijl de eerste alleen geeft

$$\frac{2s}{\delta^3} Cos.(v' + \psi) = -a^{-3}\lambda \, Sin.(\psi + l).$$

Verder is

$$\frac{1-s^2}{\delta^3} Cos.2(v'+\psi) = \frac{1-s^2}{\delta^3}\{Cos.2(mt+\varepsilon+\psi)\,Cos.2\sigma - Sin.2(mt+\varepsilon+\psi)\,Sin.2\sigma\},$$

waarvan de eerste term zich herleidt tot

$$Cos.2(mt+\varepsilon+\psi) + \tfrac{17}{4}e^2 \, Cos.2(\psi+\omega) + \tfrac{1}{4}\lambda^2 \, Cos.2(\psi+l),$$

en de tweede tot

$$\tfrac{17}{4}e^2 \, Cos.2(\psi+\omega) - \tfrac{1}{4}\lambda^2 \, Cos.2(\psi+l),$$

zoodat

$$\frac{1-s^2}{\delta^3} Cos.2(v'+\psi) = a^{-3}\{Cos.2(mt+\varepsilon+\psi) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \, Cos.2(\psi+l)\}$$

wordt.

Eindelijk vindt men nog

$$\frac{2s}{\delta^3} Sin.(v'+\psi) = a^{-3}\lambda \, Cos.(\psi+l).$$

Door substitutie van al die waardne in (12) verkrijgt men dan:

$$d\theta = \frac{D}{2a^3}\left\{-[Sin.2(mt+\varepsilon+\psi) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \, Sin.2(\psi+l)]\, Sin.\theta + \lambda \, Sin.(\psi+l)\, Cos.\theta\right\}. \quad (13)$$

$$d\psi = \frac{D}{2a^3}\left\{(1+\tfrac{3}{2}e^2-\tfrac{3}{2}\lambda^2)\, Cos.\theta + \lambda \, Cos.(\psi+l)\frac{Cos.2\theta}{Sin.\theta} - [Cos.2(mt+\varepsilon+\psi) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \, Cos.2(\psi+l)]\, Cos.\theta\right\}$$

Het verdient opmerking, dat uit deze formulen de lengte ω van het perigeum verdwenen is. Men kan nu nog in dezelve, even als zulks bij Poisson geschiedt, in plaats van de helling λ op de vaste ecliptica, de helling λ' op de beweeglijke invoeren, welke laatste voor de maan nagenoeg onveranderlijk is.

Is namelijk l_z de lengte van den klimmenden knoop der zon op de vaste ecliptica, λ_z de helling van hare baan, en neemt men in het vlak der baan van de maan een punt, dat op de eenheid van afstand van de aarde is verwijderd, en waarvan v de lengte is op de vaste ecliptica, dan zijn, met dezelfde naauwkeurigheid van benadering als in de voorgaande berekeningen,

$$\lambda \, Sin.(v-l) \quad \text{en} \quad \lambda' \, Sin.(v-l)$$

de afstanden van dat punt tot aan de vaste en de beweegbare ecliptica,

welke afstanden gerekend kunnen worden langs elkander te vallen; het gedeelte van die loodlijn, dat tusschen beide ecliptica ligt, zal dan tot waarde hebben

$$\lambda_z \, Sin. (v - l_z),$$

en daar dit gedeelte gelijk is aan het verschil der beide voorgaande afstanden zal dus

$$\lambda_z \, Sin. (v - l_z) = (\lambda - \lambda') \, Sin. (v - l)$$

moeten zijn voor alle waarden van v. Stelt men hierin achtervolgends $v = 0$ en $v = 90^\circ$, dan vindt men de beide betrekkingen:

$$\lambda \, Sin. l = \lambda' \, Sin. l + \lambda_z \, Sin. l_z,$$

$$\lambda \, Cos. l = \lambda' \, Cos. l + \lambda_z \, Cos. l_z;$$

als men nu, wegens de geringe waarde van λ_z, en daar reeds λ niet groot is, λ^2_z en het product $\lambda_1 \lambda_z$ buiten berekening laat, dan vindt men door de som der vierk. van de laatste vergelijkingen te nemen:

$$\lambda^2 = \lambda'^2,$$

en verder:

$$\lambda \, Sin. (\psi + l) = \lambda' \, Sin. (\psi + l) + \lambda_z \, Sin. (\psi + l_z),$$

$$\lambda \, Cos. (\psi + l) = \lambda' \, Cos. (\psi + l) + \lambda_z \, Cos. (\psi + l_z);$$

zoodat men door substitutie dezer waarden in de formulen (15) verkrijgt:

$$d\theta = \frac{D}{2a^3}\Big\{[\lambda_z \, Sin. (\psi + l_z) + \lambda' \, Sin. (\psi + l)] \, Cos. \theta$$

$$- [\tfrac{1}{2} \lambda'^2 \, Sin. 2 (\psi + l) + Sin. 2 (mt + \varepsilon + \psi)] \, Sin. \theta\Big\} \, dt; \quad . \quad . \quad (14)$$

$$d\psi = \frac{D}{2a^3}\Big\{[1 + \tfrac{3}{2} e^2 - \tfrac{3}{2} \lambda'^2] \, Cos. \theta + [\lambda_z \, Cos. (\psi + l_z) + \lambda' \, Cos. (\psi + l)] \frac{Cos. 2\theta}{Sin. \theta}$$

$$- [\tfrac{1}{2} \lambda'^2 \, Cos. 2 (\psi + l) + Cos. 2 (mt + \varepsilon + \psi)] \, Cos. \theta\Big\} \, dt$$

De overeenkomst van deze formulen met die van Poisson valt in het oog, als men in aanmerking neemt, dat elk derzelve uit de som van twee deelen bestaat, welke men verkrijgt, door daarin voor D en de overige grootheden achtervolgends de waarden te substituëeren, welke op de zon en de maan betrekking hebben. Stelt men dan de verhouding van de

werking der maan tot die der zon door ω voor, dan kunnen zij onder denzelfden vorm geschreven worden. Er is alleen dit verschil, dat in plaats van den factor $\frac{2C-A-B}{4}$ hier de factor $\frac{C-A}{2}$ gevonden wordt; het verschil tusschen A en B is echter zoo gering, dat dit geen invloed op de getallenwaarden der formulen kan hebben, en de twee factoren als dezelfde beschouwd mogen worden, terwijl ook later POISSON bij eene berekening, in dien factor, A = B neemt.

7.

Uit de formulen (14), welke betrekking hebben op de vaste ecliptica, kan men nu een ander stelsel vinden, dat, hoewel met een geringeren graad van benadering, toch vrij naauwkeurig de beweging van de aarde om haar zwaartepunt voorstelt.

Voor de zon mag men in de waarde van L (5), $M' : M + M' = 1$ nemen, omdat de massa M der aarde zeer gering is in vergelijking van die der zon; stelt men de massa der aarde gelijk aan ω maal die der maan, dan heeft men voor de zon en voor de maan, als men bij deze laatste de overeenkomstige grootheden door accenten aanduidt:

$$D = \frac{3\,m^2\,a^3\,(C-A)}{C\,n}, \qquad = \frac{1}{1+\omega}\,\frac{3\,m'^2\,a'^3\,(C-A)}{C\,n}$$

Verder is voor de zon de helling der baan op de beweeglijke ecliptica $\lambda' = 0$; verwaarloost men dan de helling λ_z van de beweeglijke op de vaste ecliptica, en de periodieke termen, in wier argument de coëfficient m der middelbare beweging in de baan voorkomt, en voor de maan nog de periodieke termen, die met de tweede magt van de helling λ' op de beweeglijke ecliptica zijn vermenigvuldigd, dan zijn de formulen, welke de werking der zon zullen geven:

$$d\theta_1 = 0\,, \quad d\psi_1 = \frac{3\,m^2\,(C-A)\,Cos.\,\theta}{2\,C\,n}\,(1+\tfrac{3}{2}e^2)\,dt; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

en die, welke de werking der maan bepalen:

$$d\theta_2 = \frac{3\,m'^2\,(C-A)\,Cos.\,\theta}{2\,(1+\omega)\,C\,n}\,\lambda'\,Sin.\,(\psi+l).\,dt,$$

$$d\psi_2 = \frac{3\,m'^2\,(C-A)}{2\,(1+\omega)\,C\,n}\left\{(1+\tfrac{3}{2}e^2-\tfrac{3}{2}\lambda^2)\,Cos.\,\theta + \frac{\lambda'\,Cos.\,2\,\theta}{Sin.\,\theta}\,Cos.\,(\psi+l)\right\}dt;$$

zoodat men voor de gezamentlijke werking van die hemelligchamen heeft:

$$d\theta = d\theta_1 + d\theta_2 \,, \qquad d\psi = d\psi_1 + d\psi_2 \,.$$

In deze formulen is λ' eene standvastige: l, de lengte van den knoop der maan, eene functie van den tijd: en wel, als k de nagenoeg eenparige snelheid voorstelt waarmede die lengte afneemt, dan heeft men:

$$l = -kt + \varepsilon \,,$$

ε zekere standvastige zijnde. Bij het integreeren derzelve mag men vooreerst, wegens de zeer kleine veranderingen van de schuinsheid der ecliptica, hetgeen ook door de periodieke waarde van $d\theta_2$ wordt aangeduid, den hoek θ in het tweede lid standvastig stellen, en daarvoor nemen eene waarde θ', die tusschen het maximum en het minimum van dezen hoek ligt. Ook mag men, als de formulen over geen al te groot tijdsverloop worden uitgestrekt, de waarde van ψ in het tweede lid als eene standvastige beschouwen. Neemt men de aanvankelijke waarde van $\psi = 0$, zoo verdwijnt deze hoek uit de tweede leden, en de waarde van ψ, die men nu door de integratie verkrijgt, geeft dan de verplaatsing van de lijn der nachteveningen langs de vaste ecliptica.

Men vindt aldus door integratie der vergelijkingen (15):

$$\theta_1 = Const. \,, \qquad \psi_1 = \frac{3\,m^2\,(\mathrm{C}-\mathrm{A})\,Cos.\theta'}{2\,\mathrm{C}\,n}\,(1 + \tfrac{3}{2}\,e^2)\,t \,; \qquad \ldots \ldots \ldots (16$$

$$\theta_2 = Const. + \frac{3\,m'^2\,(\mathrm{C}-\mathrm{A})\,Cos.\theta'}{2\,(1+\omega)\,\mathrm{C}\,n} \cdot \frac{\lambda'\,Cos.(-kt+\varepsilon)}{k} \,,$$

$$\psi_2 = \frac{3\,m'^2\,(\mathrm{C}-\mathrm{A})}{2\,(1+\omega)\,\mathrm{C}\,n}\left[(1 + \tfrac{3}{2}\,e^2 - \tfrac{3}{2}\,\lambda^2)\,Cos.\theta'.t - \frac{Cos.\,2\,\theta'}{Sin.\theta'}\,\frac{\lambda'\,Sin.(-kt+\varepsilon)}{k}\right];$$

waaruit blijkt, dat de zon alleen geene merkbare verandering in de schuinsheid der ecliptica kan voortbrengen; en, dat de lijn der nachteveningen zich in teruggaande rigting beweegt, omdat ψ geteld wordt in de tegengestelde rigting van de jaarlijksche beweging, en altijd eene positieve waarde heeft, dewijl de term, die evenredig is aan den tijd, altijd grooter is dan de periodieke term.

Om de naauwkeurigheid van die formulen aan te toonen, zullen wij met dezelve den jaarlijkschen teruggang van de lijn der nachteveningen berekenen, waarvoor de waarnemingen op andere verschijnselen de noodige getal-

lenwaarden opleveren. Wij onderstellen daarbij, volgens de *Mécanique céleste, Livre XI, no.* 5,

$$\frac{C-A}{C} = 0.00326 \ , \ Log.\ 0.00326 = 7.5132176 - 10,$$

welke grootheid afhankelijk is van de gedaante der aarde en de wet van hare digtheid.

Laat dan het juliaansche jaar, dat zeer weinig van het sterrejaar verschilt, en 365,25 middelbare zonnedagen bevat, voor éénheid van tijd aangenomen worden, dan is in deze tijdseenheid:

$$m = 360° = 1296000'', \qquad Log.\ m = 6.1126050,$$

en

$$m' = \frac{365.25}{27.321} \times 1296000'', \qquad Log.\ m' = 7.2386986,$$

$$k = \frac{365.25}{6793.29} \times 1296000'', \qquad Log.\ k = 4.8431150,$$

omdat de siderale omloopstijd der maan nagenoeg 27,321, en die van de lijn van hare knoopen 6793,29 middelbare zonnedagen bedraagt. Daar verder de sterredag 86164,1 secunden middelbare zonnetijd heeft, en in dien tijd de aarde één maal om hare as wentelt, zoo is in de aangenomene tijdseenheid

$$n = \frac{365.25 \times 24 \times 60 \times 60}{86164.1} \times 1296000'', \quad Log.\ n = 8,6763825.$$

De gemiddelde helling van de baan der maan op de beweeglijke ecliptica is:

$$\lambda' = 5°8'\,47''9 = 18527''9 \qquad Log.\ \lambda' = 4.2678262.$$

Verder nemen wij de gemiddelde schuinsheid der ecliptica

$$\theta' = 23°27'30'' \qquad Log.\ Cos.\ \theta' = 9.9625350 - 10\ ;$$

de massa der aarde gelijk aan 81 maal die der maan, dus

$$\omega = 81,$$

en nog voor de beide benoodigde excentriciteiten,

$$e = 0.0168 \qquad e' = 0.0548\ ,$$

waaruit dan verder volgt, λ' in deelen van den straal overbrengende,

$$1 + \tfrac{3}{2}e^2 = 1.0004234, \qquad Log.\ (1 + \tfrac{3}{2}e^2) = 0.0001838\ ,$$

$$1 + \tfrac{3}{2}e^2 - \tfrac{3}{2}\lambda^2 = 0.9924015, \qquad Log.\ (1 + \tfrac{3}{2}e^2\ \tfrac{3}{2} - \lambda^2) = 9.9966874 - 10\ ;$$

zoodat men verkrijgt, voor de werking der zon:

$$\psi_1 = 15''87,$$

en voor die der maan, als men alleen den term neemt, die met den tijd aangroeit:

$$\psi_2 = 34''33;$$

men vindt dus voor den totalen teruggang van de lijn der nachteveningen in één jaar,

$$\psi = 50''20,$$

hetgeen vrij naauwkeurig met de waarnemingen overeenkomt.

Voor het maximum der periodieke verandering van de helling der vaste ecliptica, dat is voor de nutatie der aardas, $Cos. (-kt+\epsilon) = 1$ stellende, vindt men:

$$9''20,$$

terwijl de waarnemingen daarvoor 9″65 geven.

Uit de onveranderlijkheid der aardrijkskundige breedten volgt, dat de polen der aarde niet merkbaar over haar oppervlak verplaatst worden; hierop waren de voorgaande beschouwingen gegrond. Dus wordt ook de as van omwenteling niet merkbaar in het ligchaam der aarde verplaatst, en kan men de hoofdas van haar grootste moment van traagheid als de ware as van omwenteling beschouwen. In dat geval volgt uit de formulen (16), dat de beweging van die as, ten opzigte van eene vaste ecliptica, door de volgende vergelijkingen is bepaald:

$$\psi = pt - a\,Sin.\,(-kt+\epsilon), \qquad \theta = \theta' + b\,Cos.\,(-kt+\epsilon), \quad . \quad . \quad (17)$$

waarin p, θ', a en b standvastig zijn, en

$$\frac{a}{b} = \frac{Cos.\,2\,\theta'}{Sin.\,\theta'\,Cos.\,\theta'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

is; dus ziet men, dat de ware omwentelings-as periodiek te zamen valt met eene gemiddelde as, wier beweging voorgesteld wordt door:

$$\psi = pt, \qquad \theta = \theta' = Const.,$$

en die dus met eene eenparige snelheid een regt cirkelvormig kegelvlak beschrijft om de as der ecliptica, in de tegengestelde rigting van de jaarlijksche beweging. Beschrijft men om het zwaartepunt der aarde een bolvormig oppervlak, en noemt men de doorsnijdingspunten der assen met dit vlak de polen van die assen, dan is de zeer kleine hoek, welke begrepen is tusschen

de bogen, die de pool der ecliptica met de ware en gemiddelde pool vereenigen, gelijk aan $a\,Sin.\,(-kt+\epsilon)$, blijkens de eerste vergelijking (17), die ook aanwijst, dat die hoek geteld moet worden in de tegengestelde rigting van ψ, dus in de tegengestelde rigting van de beweging der gemiddelde pool. Het zeer kleine boogje, dat uit de ware pool loodregt wordt getrokken op den boog, die de pool der ecliptica met de gemiddelde pool vereenigt is, met weglating der grootheden van de derde orde, $a\,Sin.\,(-kt+\epsilon)\times Sin.\,\theta'$; en, de afstand van de gemiddelde pool tot aan het voetpunt van dat boogje is, op dezelfde wijze, gelijk aan het verschil der boogen, die het genoemde kleine hoekje insluiten, dus gelijk $b\,Cos.\,(-kt+\epsilon)$, blijkens de tweede vergelijking (17).

$$x = b\,Cos.\,(-kt+\epsilon) \quad \text{en} \quad y = a\,Sin.\,(-kt+\epsilon)\times Sin.\,\theta'$$

zijn dus twee spherische onderling loodregte coördinaten, waarvan de oorsprong in de gemiddelde pool ligt, terwijl de eerste geteld wordt langs den boog, die elk oogenblik de gemiddelde pool met de pool der ecliptica vereenigt, en de tweede loodregt op die rigting. Daar nu uit dezelve volgt:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2\,Sin.\,\theta'}=1,$$

en uit (18), omdat θ' een scherpe hoek is: $b > a\,Sin.\,\theta'$, zoo toont deze vergelijking aan, dat de ware pool om de gemiddelde pool als middelpunt eene ellips beschrijft, wier groote as naar de pool der ecliptica is gerigt. Zij beweegt zich, langs die ellips, in de tegengestelde rigting van de beweging der gemiddelde pool, om de pool der ecliptica, en hare periode is dezelfde als die van den hoek $-kt+\epsilon$, welke telkens als de knooplijn der maan eene omwenteling heeft volbragt, met 360° is aangegroeid, zoodat gezegde periode ongeveer $18\frac{2}{3}$ jaar bedraagt.

Men moet wel in aanmerking nemen, dat de voorgaande beschouwingen alleen betrekking hebben op de ware beweging van de aarde om haar zwaartepunt, en niet op de schijnbare beweging, welke ontstaat met de verplaatsing van het vlak der ecliptica, door de onderlinge aantrekking ook der overige hemelligchamen.